Il calcolo letterale. BM4 13 – 19; es. pag. 88-93 ; CM pag. 324 - 395

1) Ricorda: le lettere sostituiscono i numeri e puoi dunque svolgere le medesime operazioni.

a + a =……;a + b =……; a - a =……; a · a =……; a · b =……; $a^n \cdot a$ =……; $\sqrt[n]{a^n b^m}$ =……

a : a =……; a : b =……; $a^n : a$ =……; a · a· a =……; a^{-n} =……; $a^{-n} \cdot b^m$ =……;

Attenzione ai segni e alle operazioni con le frazioni.

- $\left[-a^2 + \left(+\frac{1}{5}a^3b^2\right) : \left(-\frac{2}{5}ab^2\right)\right] : (-6a) + [(-2a^2b)^4 : (+2a^3b^2)^2] : (+4a) =$ $\left[\frac{5}{4}a\right]$
- $[2a^{n+2}b^{n+3} : (-3a^n b^n)]^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 =$ $\left[-\frac{2}{3}a^6b^9\right]$
- Calcola il rapporto tra l'area d'un triangolo equilatero di lato l = 2m e l'area del cerchio circoscritto al triangolo.

La proprietà distributiva. CM pag. 337 -339; es. 165 – 193 e pag. 368 – 369.

- $23 \cdot 7 =$ ……
- $23 \cdot 17 =$ ……
- $234 \cdot 17 =$ ……
- $5a \cdot (3 - 2b) =$ ……
- $(5a - 2b) \cdot (3 - 2b) =$ ……
- $(5a - 2b + 1) \cdot (3 - 2b) =$ ……

2) **La fattorizzazione**. BM pag. 15 es. 2; pag. 82 es. 5; CM pag. 396 – 400

Fattorizzare vuole dire scomporre un polinomio in fattori. Esistono diversi metodi, noi ne vedremo alcuni. Ricorda: 1500 = ……

La messa in evidenza.

Fattorizza, raccogliendo il fattore comune (MCD):

$15a - 10ab = \cdots$ ……; $15a - 16b = \cdots$ ……;

$3x^3 - 12x^5 = \cdots$ ……; $-3m - 6n = \cdots$ ……;

$\frac{1}{2}a^2b^3 - \frac{1}{4}a^4b^2c = \cdots$ ……;oppure: ……

$d\sqrt{3} - e\sqrt{3} = \cdots$ ……; $d\sqrt{8} - e\sqrt{50} = \cdots$ ……

$a\sqrt{3} - 3a = \cdots$ ……; $d\sqrt{10} - e\sqrt{5} = \cdots$ ……

$3(a - b) - 7(a - b) = \cdots$ ……

$3(a - b) - 7(b - a) = \cdots$ ……

$x(a + b) - (a + b) = \cdots$ ……

$(x - 5y) - (x - 5y)^2 = \cdots$ ……

$ax + bx + ay + by = \cdots$ ……

$3bc + 2ab - 2a - 3c = \cdots$ ……

$\frac{3}{4}xy + \frac{1}{2}y + 3x + \frac{1}{8}y^2 = \cdots$ ……

Con gli esponenti letterali si procede allo stesso modo.

Ricorda: $2^3 \cdot 2^4 = \cdots \ldots\ldots\ldots$ dunque: $2^n \cdot 2^4 = \cdots \ldots\ldots\ldots$; $2^n \cdot 2^{n+2} = \cdots \ldots\ldots\ldots$

$2^3 \cdot 2 = \cdots \ldots\ldots\ldots$, dunque $2^n \cdot 2 = \cdots \ldots\ldots\ldots$; di conseguenza $3^{n+2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$

Esercizio: trasforma in prodotto/ quoto di potenze.

$3^{2n} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$; $3^{2n+2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$; $x^{2n} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$; $3^{2n+m} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$;

Sfruttando un'altra ……nota proprietà delle potenze, analogamente avrai:

$3^{n-2} = \cdots \ldots\ldots = \cdots \ldots$; $x^{n-2} = \cdots \ldots\ldots = \cdots \ldots$; $x^{n-m} = \cdots \ldots\ldots = \cdots \ldots$;

Sfruttando le proprietà delle potenze, fattorizza le seguenti espressioni algebriche

$10x^n + 5x^{n+1} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$3x^n + 6x^{n-2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$-a^n + \frac{1}{2}a^{n+2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{3}{2}x^n y^{2n} + \frac{5}{2}x^{2n}y^n = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$xa^{n+2} - ya^{n+1} + za^n = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(a+2)^n - (a+2)^{n+1} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(x-3)^{2n} - (3-x)^{2n+1} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Conclusioni:

- Quando fattorizzo un polinomio, devo determinare il ……
- Quali delle seguenti uguaglianze è falsa?

i) $\mathrm{mx} + \mathrm{my} = (\mathrm{x} + \mathrm{y})\mathrm{m}$

ii) $\mathrm{ay} + \mathrm{by} + \mathrm{y} = (\mathrm{a} + \mathrm{b} + 1)\mathrm{y}$

iii) $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{x} + 1)$

iv) $\mathrm{am} + \mathrm{mb} + \mathrm{m} = \mathrm{m}(\mathrm{a} + \mathrm{b})$

v) $ax^2 + bx^2 = (a+b)x^2$

vi) $b - a = -(a-b)$

- Determina l'insieme soluzione non approssimato delle seguenti equazioni.

i) $x\sqrt{3} + 2 = -1$

ii) $x\sqrt{3} - 1 = 2x + 3$

iii) $x\left(\sqrt{2} - 1\right) = x + \sqrt{6}$

iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{2} + x = \frac{5}{2}$

v) $\frac{x+\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{x-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{-3\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$

vi) $\frac{4}{\sqrt{2}+1} - x = \frac{x}{\sqrt{2}-1}$ $\mathcal{S} = \left\{2\left(3\sqrt{2}-4\right)\right\}$

Ora **devi** svolgere gli esercizi **BM4 pag. 82 es. 5 - 6;** CM pag. 363 – 364.

3) I prodotti notevoli.

Calcola: (x+2)(x-y) = ……

Per svolgere questo prodotto devi applicare la ……nota proprietà……

Vi sono dei casi che si presentano sempre allo stesso modo, essi sono detti **PRODOTTI NOTEVOLI**, ne vediamo alcuni.

a) Il quadrato d'un binomio.

$(a+b)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(a-b)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(b-a)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-a-b)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Calcola:

$(a+3)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(2x-3)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(a^2+b^2)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(3a^2-2b^2)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{1}{2}x+3y\right)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{7}{2}x-\frac{3}{5}y\right)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(0{,}8x+2{,}3y)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1,\bar{6}x+3,\bar{9}y)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(a+\sqrt{3}\right)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{3}\right)^2 = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Sarai sicuramente in grado di dedurre una regola che ti permetta di calcolare immediatamente il quadrato d'un binomi: ……

……

Applicazione: $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

Calcola: 17^2= ; 29^2= ; 62^2= ; 103^2= ; 199^2= ; 1003^2= ;

b) Il prodotto della somma per la differenza di due numeri.

$(a+b)(a-b) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(b+a)(a-b) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(b+1)(1-b) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(-a-b)(a-b) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Regola: ……

Calcola

$(y+7)(y-7) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$(2x-3)(2x+3) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$(3a+2b)(3a-2b) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$\left(\frac{7}{2}x - \frac{3}{5}y\right)\left(\frac{7}{2}x + \frac{3}{5}y\right) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$(0{,}8x - 2{,}3y)(0{,}8x + 2{,}3y) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{x}) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

$(2\sqrt{3x}+3\sqrt{2y})(2\sqrt{3x}-3\sqrt{2y}) = \cdots \ldots = \cdots \ldots$

c) Alcuni prodotti notevoli particolari.

i) Le potenze d'un binomio: BM4 pag. 92 , es.43

$(a+b)^3 = \cdots \ldots$

$(a-b)^3 = \cdots \ldots$

$(a+b)^4 = \cdots \ldots$

$(a-b)^5 = \cdots \ldots$

ii) Il quadrato d'un trinomio.

$(a+b+c)^2 = \cdots \ldots$

$(a-b-c)^2 = \cdots \ldots$

Regola:……………………………………………………………………

iii) Cosa mi capiterà?

$(a+b+c+d)^2 = \cdots \ldots$

$(a+b+c+d+e)^2 = \cdots \ldots$

iv) Il cubo d'un trinomio.

$(a+b+c)^3 = \cdots \ldots$

$(2x+3y+z)^3 = \cdots \ldots$

Ora <u>**devi**</u> svolgere gli esercizi **BM4 pag. 88 -89;** CM pag. 370 – 382.

4) La fattorizzazione d'un prodotto notevole.

Come con i numeri bisogna saper "leggere" l'espressione e riuscire a fattorizzarla.

Esempio: 120 = ……; 60'000'000 = ……

Sapendo che $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ e che $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Possiamo leggere entrambe le uguaglianze in senso inverso e di conseguenza fattorizzare l'espressione letterale.

Esercizio: fattorizzare le seguenti espressioni utilizzando i prodotti notevoli.

a) **Riconoscere il quadrato d'un binomio:** $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

$a^2+2a+1 = \cdots$ …… ; $a^2-2a+1 = \cdots$ …… ;

$x^2+10x+25 = \cdots$ …… ; $x^2-14x+49 = \cdots$ …… ;

$y^2+20y+100 = \cdots$ …… ; $y^2-12y+36 = \cdots$ …… ;

$4a^2+4a+1 = \cdots$ …… ; $4a^2-4a+1 = \cdots$ …… ;

$6ab+9b^2+a^2 = \cdots$ …… ; $x^4-2x^2+1 = \cdots$ …… ;

$\frac{4}{25}x^4-\frac{4}{15}x^2y+\frac{1}{9}y^2 = \cdots$ …… ; $0{,}25a^2-ab+b^2 = \cdots$ …… ;

$x^2+2x\sqrt{2}x+2 = \cdots$ …… ; $a^2+2a\sqrt{3}+3 = \cdots$ …… ;

$5-4\sqrt{5}+4 = 9-4\sqrt{5} = \cdots$ …… ; $6+4\sqrt{2} = \cdots$ …… ;

$x^{4n}+4+4x^{2n} = \cdots$ …… ; $2x^{3n}+1+x^{6n} = \cdots$ …… ;

b) **Riconoscere la differenza di due quadrati:** $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$x^2-25 = \cdots$ …… ; $y^2-49 = \cdots$ ……

$a^2-5 = \cdots$ …… ; $b^2-12 = \cdots$ ……

$4x^2-100 = \cdots$ …… ; $25y^2-81 = \cdots$ ……

$4a^2-1 = \cdots$ …… ; $y^4-1 = \cdots$ ……

$y^8-1 = \cdots$ ……

$-1+9x^2 = \cdots$ …… ; $0{,}25t^2-0{,}09s^2 = \cdots$ …… ;

$\frac{4}{25}x^4-\frac{1}{9}y^2 = \cdots$ …… ; $-0{,}01z^6+\frac{1}{49}y^2 = \cdots$ …… ;

$x^2-2 = \cdots$ …… ; $5t^2-3 = \cdots$ …… ;

$x^{2n}-4 = \cdots$ …… ; $x^{6n}-1 = \cdots$ …… ;

$(a+b)^2-b^2 = \cdots$ ……

$(a+b)^2-(a-b)^2 = \cdots$ ……

$x^2-(y+1)^2 = \cdots$ ……

Ora devi svolgere gli esercizi BM4 pag. 90 es. 37 ; CM pag. 401– 408.

c) Il trinomio tipico. CM pag. 408-410 es. 212 – 261.

Calcola: $(x + a) \cdot (x + b) =$……

Ottieni: $x^2 + (a + b)x + a \cdot b =$; vale a dire il coefficiente della x è dato dalla…… mentre l'ultimo termine, detto termino noto, è dato dal ……dei due termini a e b.

Dunque per fattorizzare $x^2 + 7x + 10 =$ devo determinare due numeri in modo che la loro……sia……, mentre il loro prodotto sia……

Ottengo: a = ……; b= ……. segue che $x^2 + 7x + 10 =$……

Oppure posso fattorizzare nel seguente modo, utilizzando la messa in evidenza.

$x^2 + 7x + 10 = x^2 + 2x + 5x + 10 =$……

Osservazione:

Non trovando i due termini vorrà dire che, per ora, il trinomio non sarà scomponibile.

Esempio: $x^2 + 2x + 3 =$……

Esercizi: fattorizza, quando è possibile, i seguenti trinomi tipici in entrambi i modi:

$x^2 - 7x + 10 =$……

$y^2 - 7y - 10 =$……

$a^2 - 8a + 15 =$……

$b^2 + 10b + 25 =$……

$t^2 + 19t + 48 =$……

$x^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} =$……

$x^2 + \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{6} =$……

5) Le frazioni con termini letterali (frazioni algebriche)

a) Le condizioni d'esistenza d'una frazione.

Ricorderai che una frazione perde di significato se……

Esempi:

$\frac{3}{a} =$ perde di significato se……; dunque $a \neq 0$; oppure $a \in \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots = a \in \cdots \ldots$

$\frac{3}{2-a} =$ perde di significato se……; dunque $a \neq \cdots$; oppure $a \in \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots = a \in \cdots \ldots$

$\frac{b}{a+\frac{1}{2}} =$ perde di significato se……; dunque $a \neq \cdots$; oppure $a \in \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots = a \in \cdots \ldots$

mentre b può assumere ……, dunque $b \in \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Esercizio:

determina le condizioni d'esistenza delle seguenti frazioni algebriche:

$\frac{3}{5b} =$; $\frac{5b}{3} =$; $\frac{5b}{a+3} =$; $\frac{5-b}{a-3} =$; $\frac{5x}{2x+3} =$; $\frac{3}{a-b} =$; $\frac{x}{x+\sqrt{2}} =$; $\frac{x+\sqrt{2}}{x} =$; $\frac{5}{x^2-1} =$

b) Frazioni equivalenti.

Ricorda<.

$\frac{3}{4} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, dunque ottengo delle frazioni equivalenti ……o dividendo numeratore e denominatore per lo stesso numero, applicando la ……nota proprietà ……

Con le frazioni a termine letterale procedo allo stesso modo, applicando le ……note proprietà delle ……,per la parte letterale.

Esempio:

$\frac{1}{2} = \left\{\frac{5}{\ldots\ldots}; \frac{\ldots\ldots}{2a}; \frac{t^2}{\ldots\ldots}; \frac{\ldots\ldots\ldots}{2(x+1)}\ ; \frac{}{2\sqrt{2}}; \ldots\ldots\ldots\ldots; \frac{3^{-1}}{\ldots\ldots\ldots}; \frac{\ldots\ldots\ldots}{2x^n}; \frac{b^{-3n}}{}\right\}$

Amplifica le seguenti frazioni, ottenendo delle frazioni equivalenti.

Frazione	2	x	$2a^2b$	a +b	x - y	$\sqrt{2}$
$\frac{3}{5}$						
$\frac{a}{2}$						
$\frac{1}{x}$						
$\frac{7a}{5}$						
$\frac{7a^3}{5b^4}$						
$\frac{3}{x+y}$						
$\frac{x}{x+y}$						
$\frac{x-y}{x+y}$						

c) Ricorda:

$\frac{30}{24} =$ ……; dunque ……la frazione applicando la ……. nota proprietà ……della ……, dividendo ……e ……per lo stesso numero.

Con le frazioni con termini letterali procedo allo stesso modo, applicando le ……note proprietà delle ……, per la parte letterale.

Quando non posso più dividere numeratore e denominatore per lo stesso numero, cioè ……la frazione, dirò che è ……

Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:

$\frac{3a^2bx^3}{2a^5x^2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{3x^{2n}y^{4m}}{6x^ny^{3m}} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{3x^{2n}y^{4m-1}}{6x^{n+1}y^{3m}} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$\frac{3a^{-2}b^{-1}x^3}{2a^5x^{-2}} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{3x^{2n}y^{-4m}}{6x^{-n}y^{3m}} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{3x^{2n}y^{-4m+1}}{6x^{-n+1}y^{-3m}} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$\frac{7x^2-14x}{21x} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{x^2-3x}{7x-21} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$\frac{3a^2x^2-9a^3x}{ax^3-3a^2x^2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Alcune semplificazioni interessanti (possibilmente da ricordare!)

$\frac{2}{x-2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{2-x}{x-2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{a-b}{b-a} = \cdots \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$\frac{x^2}{x^2-2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{2-x^2}{x^2-2} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{(b-a)^2}{(a-b)^2} = \cdots \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

$\frac{x^2}{x^2-2x} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{4-x^2}{x^2-4} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{a^2-b^2}{b^2-a^2} = \cdots \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$;

Ora devi risolvere gli esercizi sul BM4 pag. 86 es. 26 e CM pag.432-436 es.51-103

6) L'addizione di frazioni algebriche.

Si procede come per la somma di numeri razionali.

$\frac{3}{4} + \frac{5}{8} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots$; $-\frac{28}{54} + \frac{24}{18} = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \cdots \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{2x}{y} - \frac{9x}{4y} = \frac{4 \cdot 2x - 1 \cdot 9x}{4y} = \frac{8x - 9x}{4y} = -\frac{x}{4y}$$

Esercizi: Semplifica le seguenti espressioni algebriche.

$\frac{a}{2b} + 5 - \frac{3a}{2b^2} =$……

$\frac{2x-4y}{20xy} - \frac{8y+3z}{30yz} =$……

$1 - \frac{x+a}{x-a} =$……

$\frac{1}{z-3} + \frac{4}{5z-15} =$……

$\frac{3}{7a+7} - \frac{a-5}{14a+14} =$……

$\frac{2a}{a-b} + \frac{3a}{b-a} =$……

$\frac{2y^2-xy}{2x-4y} + \frac{x^2-2xy}{6y-3x} =$ $\left[\frac{-2x-3y}{6}\right]$; $\frac{6x}{x^2-4} + \frac{3}{2-x} - \frac{1}{x+2} =$; $\left[\frac{2}{x+2}\right]$

Ora **devi** risolvere un qualche esercizio su CM pag.436-442, es.116-212

7) La moltiplicazione di frazioni algebriche.

La moltiplicazione di frazioni algebriche si svolge come la moltiplicazione di frazioni numeriche, ricordando quando è possibile, dopo aver scomposto in fattori, di semplificare.

Esempi.

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \cdots$; $\frac{27}{20} \cdot \frac{15}{18} = \cdots$; $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \cdots$; $\frac{10a^3}{9b^2} \cdot \frac{21b^4}{20a^5} = \cdots$;

- $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{b-1}{b} = \cdots$; $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a-1}{a} = \cdots$;
- $\frac{15a^5}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{12a^4} =$;
- $\frac{a^2-1}{a+1} \cdot \frac{b-1}{b^2-1} =$;
- $\frac{a^2-1}{(a+1)^2} \cdot \frac{(b-1)^2}{b^2-1} =$;
- $\frac{a^2-1}{(1-a)^2} \cdot \frac{(b-1)^2}{1-b^2} =$;
- $\frac{x^2-4}{x^2+x} \cdot \frac{x^3-x}{x^2-4x+4} =$;
- $\frac{25-10y+y^2}{x^2+6x+9} \cdot \frac{9-6x+x^2}{y^2+10y+25} =$;
- $\frac{a^3-ab^2}{a^4-a^3b} \cdot \frac{a^2+ab^2}{a^2-2ab+b^2} \cdot (a-b) =$;

Ora **devi** risolvere un qualche esercizio su CM pag.444-446, es.261-223.

8) La divisione di frazioni algebriche.

La divisione di frazioni algebriche si svolge come la divisione di frazioni numeriche, ricordando quando è possibile, dopo aver scomposto in fattori, di semplificare.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \cdots$; $\frac{27}{20} : \frac{15}{18} = \cdots$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \cdots$; $\frac{10a^3}{9b^2} : \frac{20a^4}{27b^5} = \cdots$;

- $\frac{3a^2-12}{a+1} : \frac{3a+6}{a^2-1} =$;
- $\frac{a^2+2a+1}{a^2-1} : \frac{a^2+a}{a^2-2a+1} =$;
- $(2a^2+a) : (4a^2-1) =$;
- $\frac{b^2-5b+6}{b+1} : (b-2) =$;
- $\frac{\frac{a^2-a}{2a^3}}{\frac{a^2-1}{4a^2}} =$;

  ……

- $\frac{\frac{1}{ax^2-ay^2}}{\frac{1}{ax+ay+bx+by}} =$ ……

  ……

Ora **devi** risolvere un qualche esercizio su CM pag.447-450, es.276-325.

9) L'elevazione a potenza di frazioni algebriche.

L'elevazione a potenza di frazioni algebriche si svolge come per le frazioni numeriche, applicando le ……note proprietà.

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 =$ ……; $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 =$ ……;$\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} =$ ……;$\left(-\frac{8}{27}\right)^2 =$ ……;

$\left(-\frac{a}{b}\right)^2 =$ ……; $\left(-\frac{a}{b}\right)^3 =$ ……;$\left(-\frac{2a}{3b}\right)^2 =$ ……;$\left(-\frac{2a^4}{3b^5}\right)^2 =$ ……;

- $\left(-\frac{5x^3}{x+1}\right)^2 =$ ……
- $\left(-\frac{5x^3}{x+1}\right)^3 =$ ……
- $\left(-\frac{5x^3}{x+1}\right)^{-2} =$ ……
- $\left(-\frac{5x^3}{x+1}\right)^{-3} =$ ……
- $\left(\frac{2x^{-1}}{(x-1)^{-2}}\right)^{-3} =$……
- $\left(\frac{a^2-b^2}{(a-b)^{-2}}\right)^{-2} =$ ……

Ora **devi** risolvere un qualche esercizio su CM pag.446-447, es.262 - 275.

10) Semplificare espressioni con frazioni algebriche.

Si procede come per la semplificazione d'espressioni con le frazioni numeriche.

- $\left[\left(\frac{a+1}{a}\right)^8\right]^2 : \left(\frac{a}{a+1}\right)^{-14} =$ ……
- $\left(\frac{3-a}{a-2}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{a}{a-4}\right)^8 \cdot \left(\frac{a-3}{2-a}\right)^5 \cdot \left(\frac{a}{4-a}\right)^{-8} =$ ……

……

- $\left[(a^{-1} + a^{-2}) \cdot \frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a}\right] \cdot \left(\frac{a}{1-a^2}\right)^{-2} \cdot (2a+2)^{-1} =$ ……

……

Ora **devi risolvere** gli esercizi sul BM4 pag. 91 es. 41 e CM pag. 451 – 456, es. 326 – 417.

Applicazioni del calcolo letterale alla risoluzione d'equazioni.

11) Le equazioni di secondo grado. BM4 pag.20-21; pag.93 es. 45-49
CM pag. 496-7es. 436-43

Osservazione: il grado d'una equazione è determinato dall'esponente dell'incognita. Finora abbiamo risolto equazioni di primo grado, ora vedremo come procedere con le equazioni di secondo grado.

Ricorda: il prodotto tra due numeri è nullo se: ……

Esempio: $3 \cdot \mathrm{m} = 0$; se ……; $(x+2) \cdot 3 = 0$; se ……

Dunque: $(x+2) \cdot x = 0$ se : ……

se:

$(x+2) \cdot (x-3) = 0$ $(x+2) = 0$ oppure $(x-3) = 0$

x = …… x= …… per cui l'equazione è determinata $\mathbb{S} = \{\ldots ; \ldots\ldots\}$

Ma $(x+2) \cdot (x-3) = \cdots$ ……; dunque avrei potuto anche scrivere $x^2 - x - 6 = 0$; oppure $x^2 - x = 6$ che sono tutte equazioni equivalenti.

Regola per risolvere un'equazione di secondo grado:

……

Il numero degli elementi dell'insieme soluzione corrisponde……

Risolvi nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, le seguenti equazioni, cercando di fattorizzare l'espressione letterale ed uguagliando a zero il prodotto ottenuto.

$5x^2 - 3x = 0$	$20y^2 = -3y$	$x^2 = 100$	$x^3 = 100x$
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
$x^4 = 16$	$y^2 = 7$	$x^4 = 9$	$x^2 = 20x - 100$
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……
……	……	……	……

$x^2 = 100x - 99$ $(4y+3)(5-y) = 0$ $(x^2-5)(x^2-9) =$

Osservazione: risolvi le seguenti equazioni, cosa noti? $x^2 = -25$; $x^2 + 3x + 3 = 0$

Conclusione: ……

- Verifica quali tra i seguenti valori x=-3 e x =8; sono soluzione dell'equazione $x^2 = -10x - 16$?

12) Equazioni di II grado: un metodo di risoluzione particolare.

Ricorda: $x^2 = 25$; $x = \mp 5$ poiché ……., dunque abbiamo ……

Possiamo sfruttare questa uguaglianza per risolvere alcune equazioni di secondo grado.

a) $(3x-2)^2 - 1 = 0$

i) Risolvo utilizzando i radicali:

$(3x-2)^2 = 1$; da cui $(3x-2)^2 = \mp\sqrt{1}$; otteniamo

$3x - 2 = +1$ e $3x - 2 = -1$

…… ……

…… ……

Per cui l'equazione è determinata con $\mathcal{S} = \{\ldots\ldots; \ldots\ldots\}$

ii) Risolvo semplificando e fattorizzando l'espressione.

$(3x-2)^2 - 1 = 0$; $9x^2 - 12x + 4 - 1 = 0$; $9x^2 - 12x + 3 = 0$; $3(3x^2 - 4x + 1) = 0$;

$(3x^2 - 4x + 1) = 0$ che posso anche scrivere $3x^2 - 3x - x + 1 = 0$

Che fattorizzo:……

Da cui ottengo:……

……

Per cui l'equazione è determinata con $\mathcal{S} = \{\ldots\ldots; \ldots\ldots\}$

b) Risolvi: $4 - (5x-1)^2 = 0$

i) Risolvo utilizzando i radicali.

……

……

……

ii) Risolvo semplificando e fattorizzando l'espressione.

……

……

……

c) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado, applicando entrambi i metodi.

$(5x-2)^2 - 1 = 0$; $(2x+1)^2 - 4 = 0$; $(7x+3)^2 + 1 = 0$; $(x-2)^2 - 9 = 0$

d) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado, applicando la fattorizzazione.

$6x^2 - 17x + 5 = 0$; $2x^2 + 3x - 20 = 0$; $8x^2 + 10x - 7 = 0$; $6x^2 - 5x - 6 = 0$

e) Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado, utilizzando i radicali.

$(x-1)^2 = \frac{3}{4}$; $(2x-3)^2 = 27$; $\left(x - 2\sqrt{2}\right)^2 = 18$; $\left(\sqrt{5} - 2x\right)^2 - 125 = 0$

f) Prova a risolvere le seguenti equazioni, cosa noti?

$x^2 + 25 = 0$; $x^2 + 10 = 0$; $(2x+1)^2 + 4 = 0$; $x^2 + x + 5 = 0$;

13) **Equazioni fratte.** BM4 pag.22 es. pag.93 – 94. NLM es. Pag.475 – 480, es.183-261.

Ricorda: Una frazione pere di significato se ……

Esercizio: Determina per quale valore della variabile la frazione è priva di significato.

a) $\frac{2}{a} =$ b) $\frac{b}{2} =$ c) $\frac{2}{a\,b} =$

d) $\frac{2}{m-1} =$ e) $\frac{2}{\sqrt{a}} =$ f) $\frac{2}{\sqrt{1-a}} =$

g) $\frac{\sqrt{a}}{2} =$ h) $\frac{\sqrt{1-a}}{2} =$ i) $\frac{2}{x^2} =$

j) $\frac{x^2}{2} =$ k) $\frac{2}{(x+1)^2} =$ l) $\frac{2}{x^2+7x+12} =$

Osservazioni:

a) Un'equazione è detta fratta quando l'incognita appare al denominatore.

Es. i) $\frac{1}{x} = 2$; ii) $2 = \frac{1}{x-1}$;iii) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x}$; iv) $\frac{3\,(x-1)}{2x-2} = 1$; v) $\frac{2x}{x-3} - \frac{5}{x} = \frac{6x}{3x-9} + \frac{2}{3x}$

b) Prima di risolvere un'equazione fratta devo chiedermi quale(i) valore (i) non può (possono) assumere l'incognita al denominatore e di conseguenza **escluderlo** (i) dalle eventuali soluzioni.; questo valore è detto VALORE ECCEZIONALE : V.E. x = ……

c) Se non specificato, l'insieme nel quale risolviamo l'equazione è quello dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Determina i valori eccezionali degli esempi precedenti.

i) …… ii) …… iii) ……

iv) …… v) ……

Come ben potrai notare la risoluzione d'equazioni fratte ti porta a gestire frazioni algebriche, dunque dovrai affinare la tua tecnica di calcolo per poter affrontare tranquillamente questo argomento.

Risolvi ora le seguenti equazioni fratte, evidenziando il valore eccezionale prima di risolvere l'equazione e verificandolo al termine.

i) $\frac{1}{x} = 2$ V.E. : x =……. ottengo 1 = 2x; $\frac{1}{2} = x$

soluzione accettabile, equazione determinata $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

ii) $2 = \frac{1}{x-1}$ V.E. : x =…….

$\frac{2(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

$2x - 2 = 1$

…… = ……

…… = …… sol. ac. eq. Det. $S = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

iii) $\frac{1}{x-1} = \frac{2}{x}$ iv) $\frac{3\,(x-1)}{2x-2} = 1$

v) $\frac{2x}{x-3} - \frac{5}{x} = \frac{6x}{3x-9} + \frac{2}{3x}$

Esercizi.

Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti **equazioni fratte**, specificando il/i **V.E.** all'inizio e verificandolo nell'eventuale insieme soluzione. Controlla il tuo lavoro con la visualizzazione CAS di GeoGebra

a) $\frac{2x-1}{x+3} = 1$ b) $\frac{2x-1}{x+3} = 2$ c) $\frac{2x-1}{x+3} = \frac{-7}{x+3}$

d) $\frac{x^2}{x-2} - 1 = \frac{6-x}{x-2}$ e) $\frac{2x}{x+10} + \frac{10}{x-10} = \frac{2x^2}{x^2-100}$

f) $\frac{2(x-2)}{x-3} - \frac{x-1}{x+2} = 1 + \frac{5}{x}$ PFC del 1993

g) $\frac{3-x}{1-3x} - 3 = \frac{9x^2}{3x-1}$ $S = \left\{0; -\frac{8}{9}\right\}$ PFC del 1994

h) $\frac{5-x}{x^2-1} = 1$ $S = \{-3; 2\}$; PFC del 1996

i) $\frac{-3+x}{1-x} = x$ $S = \{\pm\sqrt{3}\}$; PFC del 1996

j) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$ $S = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ perché? PFC del 1996

k) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1}$ $S = \{\ \}$ perché? PFC del 1996

l) $\frac{\frac{x}{2} - (x-1) + \frac{x+1}{3}}{\frac{x}{3} - x} = \frac{3}{4} - \frac{2}{x}$ $S = \{\ \}$ perché? Ginnasio 85

m) $\frac{x}{x+\sqrt{2}} - \frac{1}{x-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2-x^2}$ $S = \{1\}$ **solo, perch**è ?