Insieme Numerici.

1) **I Numeri Naturali:** $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ =

Rappresentazione sulla retta numerica.

Ricorda:

Scomposizione in fattori primi.

240 = 24 . 10 = 12 .2 .2 .5 = 4 . 3 .2^2 . 5 =2^2 . 3 .2^2 .5 = 2^4.3 . 5

360=

18'000 =

mcm – MCD

Calcola m.c.m e M.C.D tra i seguenti numeri:

6; 8 – 6 ; 18 - 20 ; 60 - 12 ; 18 ; 24 - 3;4 - 56; 72 - 240 ; 360 – 8'000;4'800

Problemi m.c.m – M.C.D.

a) Tre scatole contengono tre tipi diversi di frutti; la prima contiene 245 banane, la seconda 105 ananas e la terza 420 kiwi. Si vogliono distribuire in cesti contenenti tutti lo stesso numero di frutti dello stesso tipo, in modo che ciascun cesto ne contenga il maggior numero possibile.

Quanti cesti si possono confezionare con ogni scatola? Quanti frutti conterrà ogni cesto? [35 cesti, 7 banane, 3 ananas, 12 Kiwi]

b)Tre automobilisti effettuano una corsa di formula 1 su una pista circolare; partono contemporaneamente e procedono con velocità costante. Il primo compie un giro ogni 56 secondi, il secondo ogni 48 secondi, ed il terzo ogni 42 secondi.

i) Dopo quanto tempo (minuti e secondi) passeranno tutti e tre contemporaneamente dal traguardo?

ii) quanti giri avrà fatto ciascun pilota? [5 min. 36 sec., 6, 7, 8]

Insiemi:

a) Dati $A = \{x \in \mathbb{N} \setminus 7 < x \leq 14\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \setminus 1 \leq x < 14 \; e \; x\epsilon \; M_2\}$

Determina per elencazione : $A \cup B =$; $A \cap B =$; $A \setminus B =$; $B \setminus A =$

Rappresenta la situazione con un diagramma di Venn.

b)Gli allievi d'una classe sono abbastanza girovaghi, tutti hanno visitato almeno una città, ma in particolare 15 hanno visitato Barcellona; 12 Londra e 10 Parigi, inoltre sai che 5 sono stati sia Barcellona che a Londra, 3 a Londra e a Parigi, sei a Barcellona e a Parigi, mentre due hanno visitato tutte e tre le città. Determina:

i) Quanti allievi hanno visitato solo Barcellona?

ii) Quanti allievi hanno visitato solo Londra?

iii) Quanti allievi hanno visitato solo Parigi?

iv) Quanti allievi vi sono in totale in quella classe?

Le proprietà delle potenze in $\mathbb{N}$.

Applicandole correttamente le operazioni fra potenze possono essere semplificate.

P R O P R I E T A `	**Calcola:**
Prodotto di potenze di <u>uguale base</u> $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	$3^2 \cdot 3^3$ = ...; $2^3 \cdot 2^4$ = ... $10^2 \cdot 10$ = ...; $7^5 \cdot 7^8$ = ... $X^2 \cdot x^3$ = ...; $a^5 \cdot a^8$ = ... $X^2 \cdot x^3 \cdot x^6$= .....; $3x^4 \cdot 2x^5$ =.....;
Quoto di potenze di <u>uguale base</u> Se n $\geq$ p $a^n : a^p = a^{n-p}$ $a^n : a^n = a^{n-n} =$ $\boxed{a^0 = 1}$	$2^5 : 2^3$ = ...; $x^5 : x^3$ = ...; $6^7 : 6^4$ = ...; $m^6 : m^4$ = ...; $10m^6 : 2m^4$ = ...; $12x^8 : 3x$ = ...; $10^5 : 10^5$ =.....; $b^8 : b^8$ =.....; $(8^7 : 8^2) : 8^3$ = ... $3^8 : 3^7 \cdot 3^2$ = ... $(30y^{20} : 2\,y^{13}) : 5y^2$= .....
Potenza di una potenza $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$	$(2^2)^3$ = ...; $(3^2)^4$ = ... $(10^2)^3$ = ...; $(x^2)^4$ = ... 25 = ... ; $(25^2)^4$ =..... $(27^2)^5$ =.....: $(64^3)^5$ =..... $(5^2)^3 + 5^6$ = ...
Prodotto di potenze con <u>esponenti uguali</u> $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 3^3$ = ... $10^2 \cdot 5^2$ = ... $x^2 \cdot y^2$ = ... $30^2 = (3 \cdot 10)^2$ = ... $7^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ = ...
Quoto di potenze con <u>esponenti uguali</u> $a^n : b^n = (a : b)^n$	$49^3 : 7^3$ = ... $1'000^2 : 125^2$ = ... $15x^4 : 5x^4$ =..... $3^4 : 3^4$ = ...; $x^m : x^m$ =

Calcola applicando , se possibile , le proprietà delle potenze.

a) $8+(1+7^4:7^2):(5^6:5^4)+4^6:4^4:(2^6:2^4) - 9^0$ = [13]

b) $8:\{[(7^4)^3:7^{10}-(5^2)^3:5^4-(3^4-6^2):5]:(3+4\cdot3)\}\cdot3-2^5:2^4$= [22]

c) $(28^2:14^2+10^4:5^4):5+[5+5\cdot(1+3\cdot5)-10^5:10^4]:(2\cdot17-3^2)+6^1-25^0$= [12]

d) $(13^7 - 13^5) :13^5 - (9^5 : 81^2)$ = [159]

L' equazioni.

L' equazioni $x + 6 = 32$

$24 = 2x$

Hanno entrambe una soluzione.

Non hanno soluzione le equazioni:

$x + 6 = 2$

$2x = -24$

$2x = 7$

2) I Numeri Interi Relativi: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} =$

Rappresentazione sulla retta numerica.

Le operazioni e il problema dei segni:

L'addizione e la sottrazione.

Completa le seguenti tabelle:

+	+4	+23	-13
+2			
-12			
-7			

-	+4	+23	-13
+2			
-12			
-7			

+	-5	
+4		0
	-8	
		13

-	-5	
+4		0
	-8	
		13

a) Con le lettere, procedi allo stesso modo.

$(-13x) + (+12x) =$; $(-16m^3) + (-12m^3) =$; $(-16x^2y) + (-21x^2y) =$

$(+16ab^3) - (-12ab^3) =$; $(-16mn) - (+12mn) =$; $(-16y) - (-21y) =$

b) Con le frazioni, procedi allo stesso modo, ma attenzione ai segni!

$(+\frac{1}{2}x) + (+\frac{1}{4}x) =$; $(+\frac{1}{4}m^3) + (-\frac{5}{6}m^3) =$; $(-\frac{1}{6}x^2y) + (-\frac{1}{9}x^2y) =$

$(+\frac{1}{4}ab^3) - (-\frac{1}{8}ab^3) =$; $(-\frac{1}{5}mn) - (+\frac{1}{10}mn) =$; $(-\frac{10}{24}y) - (-\frac{27}{81}y) =$

La moltiplicazione.

*	-4	+7	-13
+2			
-11			
-9			

*	-3		-12
	-15		
-6		-48	
-13			

Con le lettere procedi allo stesso modo per la parte numerica ed utilizza le proprietà delle potenze per la parte letterale.

$(- 3x) \cdot (+ 2x) =$; $(- 6m^3) \cdot (- 12\ m^3) =$; $(- 3x^2y) \cdot (- 21x^2y) =$

$(+ 6ab^3) \cdot (- 2\ ab^3) =$; $(- 13mn) \cdot (+ 2\ mn) =$; $(- 7y) \cdot (- 3y) =$

La divisione.

:	-30	8	-12
2			
3			
-4			

:	-24	32	
	-12		
3			-34
		-8	

Con le lettere procedi allo stesso modo per la parte numerica ed utilizza le proprietà delle potenze per la parte letterale.

$(- 30x^6) : (+ 2x) =$; $(- 60m^5) : (- 12\ m^3) =$; $(- 63x^7y^4) : (- 21x^5y) =$

$(+ 16a^2b^3) : (- 2\ ab^3) =$; $(- 36m^4n^7) : (+ 4\ mn^7) =$; $(- 27y) : (+3y) =$

L'elevazione a potenza.

a) Calcola:

$(-4)^2 =$; $- 4^2 =$; $(+7)^3 =$; $(-7)^3 =$; $-7^3 =$; $(- 1)^{32} =$; $(+ 1)^{32} =$; $- 1^{32} =$;

Con le lettere procedi allo stesso modo, ma ricordati delle proprietà delle potenze.

$(- 4x)^2 =$; $(+7x^2)^3 =$; $(-7x^2)^3 =$; $(- 2x^2y^3)^2 =$; $(- 2x^2y^4)^3 =$

b) Trascrivi la potenza cambiando la base.

$(+4)^2 =$; $(- 4)^2 =$; $- 4^2 =$; $(- 9)^2 =$; $- 9^2 =$; $- 25^4 =$; $(- 49)^3 =$; $(- 25)^4 =$;

L' equazioni $x - 6 = -32$

$2x = - 24$

Hanno entrambe una soluzione.

Non hanno soluzione le equazioni:

$3x + 6 = 2$; $5x = - 24$; $2x = 7$

3) I Numeri Razionali: $\mathbb{Q}$ - Le frazioni. (Teoria pag. 17 – 38)

La frazione : $\frac{Numeratore}{Denominatore}$ =

Una frazione ha significato se il denominatore è DIVERSO da ZERO!

Espressioni del tipo $\frac{4}{0}$ oppure $\frac{2x}{0}$ non hanno senso! Motiva il perché!

Es. Determina per quali valori della variabile la frazione perde di significato:
$\frac{2}{x}$; $\frac{2}{x+1}$ $\frac{2}{x-1}$; $\frac{2}{3x}$; $\frac{2}{2x-2}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{b-2}$; $\frac{a+3}{b-2}$; $\frac{a+3}{2b-2}$

Ricorda una frazione è :

a) Una parte d'un intero, frazione **propria** : $\frac{3}{4}$ prendo 3 parti su 4
oppure : $\frac{5}{4}$ prendo 5 parti su 4 , frazione **impropria**, ho bisogno più d'un intero.
oppure: $\frac{12}{4}$ prendo 12 parti su 4 , frazione **apparente**, prendo un multiplo.

es. Dividi il segmento AB in 5 parti congruenti, utilizzando solo il compasso e la riga.

b) Un insieme di divisioni equivalenti:

$\frac{3}{4} = \left\{\frac{6}{8}; \frac{9}{12}; \ldots\ldots\frac{3a}{4a}; \frac{3x^2}{4x^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$ con a; x; ……. da zero.
$\frac{x}{4} = \left\{\frac{2x}{8}; \frac{3x}{12};\right\}$
$\frac{a}{b} = \left\{\frac{2a}{2b}; \frac{9a}{9b};\right\}$
$\frac{x^2}{4y} = \left\{\frac{2x^2}{8y}; \frac{3x^2}{12y};\right\}$

Per determinare una o più frazioni equivalenti devo :
amplificare la frazione moltiplicando numeratore e denominatore per lo stesso numero, applicando la proprietà invariantiva della divisione.
Osservazione:
Il prodotto in croce di due frazioni equivalenti è uguale:
$\frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2}{d_2}$ ===> $n_1 . d_2 = n_2 . d_1$ Esempio $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ====>

Conseguenza: Per confrontare o determinare l'equivalente di due frazioni posso utilizzare il prodotto in croce.

$\frac{1}{2}$? $\frac{4}{5}$; $\frac{2}{x} = \frac{12}{30}$; $\frac{2}{x+2} = \frac{4}{18}$; $\frac{x+1}{4} = \frac{7}{2}$; $\frac{2}{x+1} = \frac{6}{x-1}$

Esercizio : Amplifica le seguenti frazioni per il numero dato.

Frazione	2	4	x	3a	2ab	a^2
$\frac{1}{2}$						
$\frac{5}{3}$						
$\frac{a}{2}$						
$\frac{1}{x}$						
$\frac{7a}{5}$						
$\frac{7a^3}{5b^4}$						

L'operazione inversa dell'amplificazione d'una frazione è la **semplificazione**, sfruttando la proprietà **invariantiva** della divisione, divido entrambi i membri per lo stesso numero, quando non posso più dividere dirò che la frazione è **ridotta ai minimi termini**.

Esempio : $\frac{48}{60} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

Con le lettere si procede allo stesso modo: $\frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$; $\frac{4b}{2b^2} = \frac{2b}{b^2} = \frac{2}{b}$; $\frac{x^3y^5}{x^4y^2} = \frac{y^5}{xy^2} = \frac{y^3}{x}$

È possibile sfruttare la scomposizione in fattori primi d'un numero per semplificare una frazione.

$\frac{120}{280} = \frac{2^3.3.5}{2^3.5.7} = ____ = \frac{3}{7}$; $\frac{8000}{3200} = _____ = \frac{80}{32} = ____ = \frac{5}{2}$; $\frac{3^4.5^2.7^3}{3^5.5^2.7} = ____$

Es. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:

$\frac{84}{1764} =$; $\frac{2^3.5^4.}{2.5^6} =$; $\frac{27x}{15y} =$; $\frac{27x^3y^2}{15x^4y} =$; $\frac{(a+b)}{2.(a+b)} =$; $\frac{a+b}{b} =$; $\frac{\pi}{2\pi} =$

c) Il segno di una frazione.

Valgono le regole dei segni viste nella divisione con i numeri interi relativi $\mathbb{Z}$.

(+ 2) : (- 5) = $\frac{+2}{-5} = -\frac{2}{5}$

Es. Determina il segno delle seguenti frazioni.

$\frac{-2}{-5}$ =……;$\frac{-2}{+5}$ =……; $\frac{-25}{-15}$ =……=……= $\frac{-a}{+2b}$ =……; $\frac{-6ab}{-2b^3}$ =……;$\frac{0}{-5}$ =……;

d) Frazioni e numeri decimali:

Una frazione può essere scritta come una divisione e otteniamo:

i) Un numero decimale finito:

$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$ $\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$

ii) Un numero decimale periodico:

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}\overline{3}$ $\frac{1}{7} = 1 : 7 = 0{,}\overline{142857}$

Osservazione: La calcolatrice approssima sempre l'ultima cifra! Es :$\frac{8}{7}$ =

Ricerca: Sapresti individuare le frazioni che generano un numero decimale finito e quelle che generano un numero decimale periodico?

iii) La trasformazione d'un numero decimale finito in frazione.(pag. 17)

0,8 = $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; 1,24 = …… ; 1,243 = …… ;

iv) La trasformazione d'un numero decimale periodico in frazione. (pag. 18)

Sappiamo già che : $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$; $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$ ma $0,\overline{9} = 1$; $0,\overline{23} = \frac{23}{99}$ $0,\overline{748} = \frac{748}{999}$

Cosa capita se ho : $0,1\overline{2}$ = ; $0,2\overline{3} =$; $0,748\overline{8} =$

Negli altri casi possiamo procedere nei seguenti modi:

Esempio: devo calcolare la frazione generatrice di $1,\overline{2}$

a) $x = 1,\overline{2}$

$10x = 12,\overline{2}$

$\underline{-x = -1,\overline{2}}$ oppure

$9x = 11$

$x = \frac{11}{9}$

b) $x = \frac{12-1}{9}$

$x = \frac{11}{9}$

a) $x = 1,\overline{32}$

$100\,x = 132,\overline{32}$

$\underline{-\ x = -\ 1,\overline{32}}$ oppure

$99x = 131$

$x = \frac{131}{99}$

b) $x = \frac{132-1}{99}$

$x = \frac{131}{99}$

a) $x = 1,3\overline{2}$

$100\,x = 132,\overline{2}$

$\underline{-10\,x = -13,\overline{2}}$ oppure

$90\,x = 119$

$x = \frac{119}{90}$

b) $x = \frac{132-13}{90}$

$x = \frac{119}{90}$

a) $x = 5,\overline{3456}$

$10'000x = 53'456,\overline{3456}$

$\underline{-\quad x = -\quad 5,\overline{3456}}$ oppure

$9'999x = 53'451$

$x = \frac{53'451}{9'999} =$ ———

b) $x = \frac{53'456-5}{9'999}$

$x = \frac{53'451}{9'999} =$ ———

Esercizi: scrivi sotto forma di frazione i seguenti numeri razionali:

3,5 - $3,\overline{5}$ – 3,56 - $3,\overline{56}$ - $3,5\overline{6}$ - $3,45\overline{6}$ - $30,1\overline{05}$.

v) La percentuale.

La percentuale è una frazione con denominatore cento scritta sotto forma particolare.

Es: $\frac{35}{100}$ = 35 % : $\frac{120}{100}$ = ; : $\frac{1,2}{100}$ = ; : $\frac{x}{100}$ =

Trasformazione di una frazione in percentuale:

Abbiamo due possibilità:

a) Determinare la frazione equivalente con denominatore 100: es :

$\frac{5}{4}$ = ; $\frac{1}{3}$ =

b) Trasformare la frazione in decimale, moltiplicando numeratore e denominatore per 100 : es : $\frac{5}{4}$ = $\frac{1}{3}$ =

Trasformazione di una percentuale in frazione:

Scrivo la percentuale sotto forma di frazione e riduco ai minimi termini.

80% = $\frac{80}{100}$ = $\frac{8}{10}$ = $\frac{4}{15}$

vi) Il numero misto.

Es : $7\frac{1}{2}$ = 7+ $\frac{1}{2}$ = =$\frac{15}{2}$; $2\frac{3}{4}$ = ; $9\frac{5}{6}$ = ;

Trasformazione d'un decimale i numero misto:

4,5 = 4 + 0,5 = 4 +$\frac{1}{2}$ =$4\frac{1}{2}$; $\mathbf{1,\overline{32} = 1 + 0,\overline{32} = 1 + \frac{32}{99} = 1\frac{32}{99}}$

Trasformazione di una frazione in numero misto:

$\frac{7}{3}$ = $\frac{6}{3}$ + $\frac{1}{3}$ = 2+$\frac{1}{3}$ = $2\frac{1}{3}$; $\frac{20}{7}$ =

vii) Numeri misti – percentuale – decimale.

Come trasformerai in frazione e in decimale $7\frac{1}{2}$% ? $2\frac{3}{4}$% ? $5\frac{1}{3}$% ? $1\frac{2}{5}$% ?

viii) Misure di tempo , frazioni e decimali.

a) Le ore.

4h 30 mi = 4 h + $\frac{30}{60}$h = 4 h + $\frac{1}{2}$h = $\frac{8+1}{2}$ h = $\frac{9}{2}$h = $4\frac{1}{2}$ h = 4,5h

Trasforma in frazione, numero misto e decimale.

2h 30 s = ; 6h 45 min = ;6 h 45 min 30 s = ; 2 h 3min 23s = ; 7h 57 min 39 s =

b) Gli anni

1 y 6 m = 1y + $\frac{6}{12}$y = 1y +$\frac{1}{2}$y = $\frac{2+1}{2}$ y = $\frac{3}{2}$y = $1\frac{1}{2}$ y = 1,5 y

Trasforma in frazione, numero misto e decimale.

2y 15 d = ; 6 y 8 m = ; 6 y 8 m 15 d= ; 6 y 8 h = ; 7y 8 m 14d 10 h =

ix) Opposto - inverso (reciproco) d'una frazione.

L'opposto di un numero:

cambi il segno : es – 4 è opposto . di ….. ; + $\frac{3}{4}$ è opposto di ….. ; 0 opposto …..

L'inverso di un numero : es. + $\frac{3}{4}$ l'inverso è + $\frac{4}{3}$; l'inverso di - $\frac{5}{8}$ è ……

L'inverso di + 5 è ……; L'inverso di + 1 è ……; L'inverso di - 1 è ……;

x) Rappresentazione di coordinate, date con frazioni, sul piano cartesiano.

Dati A (- $\frac{17}{4}$; + $\frac{5}{2}$) ; B (- $\frac{9}{4}$; - $\frac{11}{4}$) C (2 ;0) :

i) Rappresentali sul piano cartesiano con u = 4 q

ii) Calcolo l'area del triangolo ABC.

iii) Calcola il perimetro del triangolo ABC.

Operare con le frazioni – Numeri razionali.

1) **Riduci le seguenti frazioni** ai minimi termini, dopo aver scomposto numeratore e denominatore in fattori.

Esempio : $\frac{24}{54}=\frac{2^3.3}{2.3^3}=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$: $\frac{204}{450}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

con le lettere procedi allo stesso modo: $\frac{2a^3}{10a^5}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Quale proprietà delle operazioni ti permette di semplificare una frazione?

a) $\frac{15}{18}$; $\frac{12}{30}$; $\frac{72}{48}$; $\frac{120}{160}$; b) $\frac{2^3}{2^4}$; $\frac{3}{3^2}$; $\frac{5^4}{5^2}$; $\frac{2^3.5^4}{2^4.5^2}$; c) $\frac{2}{2a}$; $\frac{3a}{4a}$;$\frac{x^3}{x^4}$; $\frac{4x^3}{2x^4}$

2) **Confrontare** delle seguenti coppie di frazioni riducendole allo stesso denominatore.

$\frac{5}{3}\ldots\ldots\frac{20}{12}$; $\frac{13}{9}\ldots\ldots\frac{9}{7}$; $\frac{4}{7}\ldots\ldots\frac{5}{8}$; $\frac{7}{6}\ldots\ldots\frac{9}{8}$

3) Addizione sottrazione di frazioni.

a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=;$ d) $\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=;$ g) $\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=;$

b) $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=;$ e) $\frac{11}{2}-\frac{5}{6}=;$ h) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{4a}=;$

c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=;$ f) $\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=;$ i) $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=;$

4) Moltiplicazione di frazioni.

Esempio : $\left(-\frac{3}{4}\right).\left(+\frac{5}{2}\right)=-\frac{3.5}{4.2}=-\frac{15}{8}$; $\left(-\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=+\frac{3.2}{4.5}=\left(+\frac{6}{20}\right)=\left(+\frac{3}{10}\right)$;

ma posso anche semplificare prima di calcolare nel seguente modo:

$\left(+\frac{3}{4}\right).\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{3.1}{2.5}=\left(-\frac{3}{10}\right)$.

a) $\left(-\frac{2}{5}\right).\left(+\frac{1}{5}\right)=;$ c) $\left(-\frac{10}{28}\right).\left(-\frac{42}{30}\right)=;$

b) $\left(+\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{4}{3}\right)=;$ d) $\left(\frac{8}{3}.\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=;$

Con le lettere si procede allo stesso modo:

Esempio $\frac{3a}{4b^2}.\frac{5a}{2b}=\frac{3a.5a}{4b^2.2b}=\frac{15a^2}{8b^3}$; $\frac{3a^3}{4b^2}.\frac{2b}{5a}=\frac{3a.1}{2b.5}=\frac{6a}{10b}$

e) $\left(+\frac{2}{a}\right).\left(-\frac{1}{a}\right)=;$ f) $\left(-\frac{2}{3a}\right).\left(-\frac{9}{4a}\right)=;$ g) $\left(+\frac{2b^4}{15a^3}\right).\left(+\frac{45a}{18b^2}\right)=;$

5) Elevazione a potenza di frazioni.

Ricorda : $3^2=3\,.\,3=9$ dunque : $\left(+\frac{1}{3}\right)^2=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots=\cdots\ldots\ldots\ldots;$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^3=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots=\cdots\ldots\ldots\ldots;$ $\left(+\frac{x^4}{3y^2}\right)^2=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots=\cdots\ldots\ldots\ldots;$

$\left(-\frac{2x^4}{3y^2}\right)^3=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

a) $\left(+\frac{5}{4}\right)^2=$ c) $\left(-\frac{5}{4}\right)^3=$ e) $\left(-\frac{2x}{3y}\right)^3=$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^2=$ d) $\left(-\frac{x}{3}\right)^2=$ f) $\left(-\frac{2x^4}{5y^2}\right)^3=$

6) Determina la frazione opposta e la frazione inversa.

a) $+\frac{3}{4}$ opposta …… inversa …….

b) $-\frac{7}{8}$ opposta …… inversa …….

c) $+\frac{3x}{4y}$ opposta …… inversa …….

d) $-\frac{7x^2y^4}{8a^5b^7}$ opposta …… inversa …….

***Osservazione*:**

i) Sommando due numeri opposti cosa ottieni?

ii) Moltiplicando due numeri uno l'inverso dell'altro cosa ottieni?

7) Divisioni di frazioni.

Esempio : $\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) . \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{3 .2}{4 .5} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$; oppure

semplificando:

$\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{5}{2}\right) = \left(+\frac{3}{4}\right) . \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{3 .1}{2 .5} = \left(-\frac{3}{10}\right)$.

a) $\left(-\frac{2}{5}\right) : \left(+\frac{1}{5}\right) =$;

b) $\left(+\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) =$;

c) $\left(-\frac{10}{28}\right) : \left(-\frac{42}{30}\right) =$;

d) $\left(\frac{15}{16} : \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} =$;

Con le lettere si procede allo stesso modo:

$\frac{3a}{4b^2} : \frac{5a}{2b} = \frac{3a}{4b^2} . \frac{2b}{5a} = \frac{3a .2b}{4b^2 .5a} = \frac{6ab}{20ab^2}$ semplificando ottengo: $\frac{3}{5b}$; $\frac{3a^3}{4b^2} . \frac{2b}{5a} = \frac{3a . 1}{2b .5} = \frac{6a}{10b}$

e) $\left(-\frac{2x^3}{5y}\right) : \left(+\frac{6x^4}{5y}\right) =$;

f) $\left(+\frac{16a^4}{15b^7}\right) : \left(-\frac{4a^2}{3b^3}\right) =$;

g) $\left(-\frac{10x^2y^4}{28a^3b^5}\right) : \left(-\frac{42x^2y^5}{30a^6b^7}\right) =$;

8) Semplici equazioni con le frazioni.

I principi che abbiamo visto con i numeri interi valgono anche con le frazioni.

a) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{4} = x + \frac{5}{6}$

c) $2y = \frac{8}{5}$

d) $-\frac{4}{9} = +3x$

e) $-\frac{2}{15}y = +\frac{8}{5}$

f) $-\frac{4}{9} = +\frac{3}{5}x$

9) Problemi con le equazioni.

a) Ad u numero aggiungo la sua metà ed ottengo 24. Calcola il numero.

b) Se un mattone pesa un chilogrammo più mezzo mattone, quanto pesa un mattone?

c) Calcola un numero che addizionato ai suoi 4/3 sia uguale a 14.

d) Calcola un numero che sommato ai suoi $\frac{3}{4}$ e ai suoi 3/5 dia 47.

FORMA PERCENTUALE DI UN NUMERO RAZIONALE.

Sappiamo già che un numero razionale si può esprimere in diversi modi: forma decimale, forma frazionaria, forma mista. Ne aggiungiamo un altro: la forma percentuale.
Valgono le seguenti uguaglianze:

$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$; $1,1 = 1\frac{1}{10} = \frac{11}{10} = \frac{110}{100} = 110\%$

Quindi il 15% di 60 kg significa $\frac{15}{100}$ di 60 kg

<u>Come calcolare con le percentuali</u>

I calcoli che si fanno quando si applica una frazione ad una grandezza sono gli stessi che si eseguono per calcolare la percentuale di una grandezza.

Poiché $\frac{15}{100}$ di $60 = 60 \div 100 \cdot 15 = 9$ (kg)

analogamente 15% di $60 = 60 \div 100 \cdot 15 = 9$ (kg)

Sappiamo che $\frac{15}{100}$ di 60 corrisponde a $\frac{15}{100} \cdot 60$
La preposizione "di " equivale ad una moltiplicazione.
Quindi anche 15% di 60 = 15% · 60
Risulta dunque comodo calcolare la percentuale sfruttando la forma decimale:
15% di 60 = 0,15 · 60 = 9

Quando si usano le percentuali?
Le percentuali servono per confrontare dei dati riferiti a quantità diverse. Le quantità diverse, cioè gli interi, si suppongono uguali a 100. La percentuale esprime così quante parti su 100.

Due giocatori di pallacanestro: Aldo e Giovanni (Giacomo è ammalato).
Aldo ha centrato 16 canestri su 20 tiri.
Giovanni ha centrato 18 canestri su 25 tiri.
Chi è stato il miglior realizzatore?

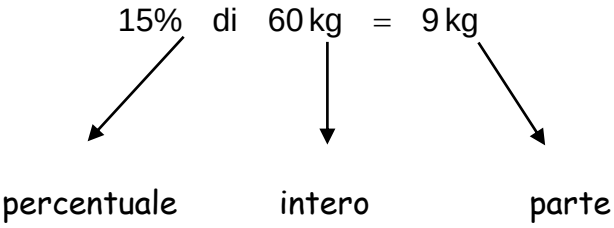
Aldo: $\frac{16}{20} = \frac{80}{100} = 80\%$. Aldo ha una percentuale realizzativa dell' 80%

Giovanni: $\frac{18}{25} = \frac{72}{100} = 72\%$. Giovanni ha una percentuale realizzativa del 72%

Aldo è stato quindi il migliore.
Le quantità diverse di tiri effettuati (20 e 25) sono state portate a 100, adattando di conseguenza i canestri centrati. 16 su 20 corrisponde a 80 su 100 e 18 su 25 corrisponde a 72 su 100. **È la trasformazione in frazioni equivalenti**.

Problemi con le percentuali.

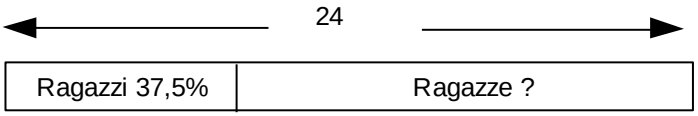
Sono problemi simili a quelli già affrontati con le frazioni. Ogni situazione con le percentuali può essere ricondotta ad uno schema in cui compaiono tre elementi: la percentuale, l'intero e la parte.



Si conoscono due di questi elementi e si deve calcolare il terzo.
Si incontrano quindi tre diverse possibilità. Le passiamo in rassegna lavorando in una stessa situazione: una classe composta da ragazzi e ragazze; il totale degli allievi è l'intero che corrisponde al 100% e nel disegno è rappresentato dal rettangolo.

Calcolare la parte

Il 37,5% dei 24 allievi di una classe sono ragazzi. Quante sono le ragazze?



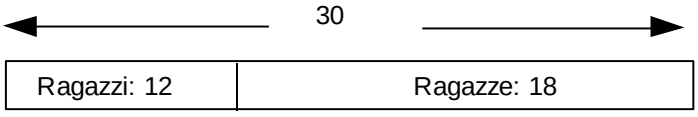
Numero dei maschi: 37,5% di 24 = 0,375 · 24 = 9
Numero delle femmine: 24 – 9 = 15

Oppure

Le ragazze sono il 62,5 % del totale degli allievi (100 – 37,5).
Numero delle femmine: 62,5% di 24 = 0,625 · 24 = 15

Es: Una penna del costo di 13,95 CHF, viene scontata del 10%. Quanto pagherò la pena?

Calcolare la percentuale.
In una classe di 30 allievi vi sono 12 ragazzi. Che percentuale rappresentano rispetto al totale degli allievi? E le ragazze?

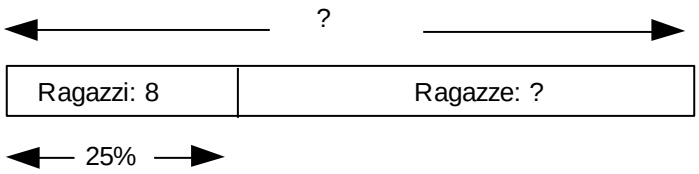


Ragazzi in percentuale: $\frac{12}{30} = 12 \div 30 = 0{,}4 = 40\%$ Le ragazze sono il 60%.

Es: In una verifica di matematica nella III D su 24 allievi ne abbiamo 16 sufficienti, mentre nella III E abbiamo 13 allievi sufficienti su 18. Quale delle due classi è stata la migliore?

Calcolare l'intero

a) In una classe ci sono 8 allievi maschi. Rappresentano il 25% del totale. Quanti sono gli allievi di quella classe?



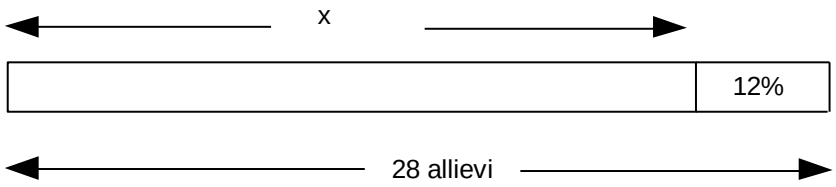
Indichiamo con x il totale degli allievi della classe.

Allora $25\%\ \text{di}\ x = 8 \quad ; \quad 0{,}25 \cdot x = 8 \quad ; \quad x = 8 \div 0{,}25 = 32$

Ci sono quindi 32 allievi, 8 maschi e 24 femmine.

b) Calcolare l'intero, ancora una volta.

Durante l'anno scolastico in una classe, a causa di nuovi arrivi, il numero degli allievi è aumentato del 12 % raggiungendo 28 unità. Quanti allievi contava la classe ad inizio anno?



Con x indichiamo il numero di allievi ad inizio anno.

Quindi $112\%\ \text{di}\ x = 28 \quad ; \quad 1{,}12 \cdot x = 28 \quad ; \quad x = 28 \div 1{,}12 = 25$

La classe ad inizio anno aveva un effettivo di 25 allievi.

Nei problemi con le percentuali è importante individuare con sicurezza la grandezza (corrispondente al 100%) a cui è riferita la percentuale. Lo si nota bene nell'ultimo esempio: la percentuale 12% non è applicata a 28, bensì al numero sconosciuto (x) degli allievi iniziali. Infatti si dice che c'è stato un aumento del 12% … rispetto al numero di allievi che c'era prima.

Problemi particolari: la percentuale della percentuale.

1) Facendo una dieta perdo in una settimana il 10% del mio peso, la settimana successiva perdo solo il 5% del peso. Qual è in percentuale il peso perso in due settimane? Supponi che all'inizio pesassi 80 kg, quanto peserò dopo due settimane? Che percentuale del peso iniziale ho perso?
2) Al mercato della frutta i prezzi sono scontati rispetto ai prezzi nei super- mercati. Alla chiusura, cioè nell'ultima ora di lavoro, per vendere la frutta rimanente i commercianti operano un ulteriore sconto.
   E` più conveniente per chi acquista alla chiusura che il commerciante pratichi uno sconto del 30% all'inizio e uno del 10% alla chiusura o viceversa?
3) Lunedì il prezzo della benzina al distributore è salito del 10% rispetto al prezzo del sabato precedente. Mercoledì il prezzo della benzina si riabbassa del 10% rispetto al prezzo di lunedì. Rispetto a sabato, il prezzo della benzina èaumentato, diminuito o rimasto costante? Di quanto? Perché?
4) In una classe l' 80% svolge i compiti di matematica, di questi solo il 40% svolge tutti gli esercizi in modo corretto. Calcola la percentuale di questi allievi rispetto agli allievi di tutta la classe.
5) Nel 2013, un'alga copre 12 km^2 di un lago africano che ha una superficie totale di 200 km^2. Dopo ogni anno, la superficie coperta dall'alga cresce del 50%. Quale percentuale della superficie del lago sarà coperta dal lago nel 2016? Dopo quanti anni l'alga avrà completamente coperto il lago?
6) Andiamo a fare la spesa alla Migros. Riempiamo il carrello con diversi prodotti, fra i quali una confezione di bistecche di manzo ribassate al 50% perché prossime alla scadenza. Arriviamo alla cassa e ci accorgiamo che quel giorno c'è un ulteriore sconto del 10% su tutto.
   - In totale, quanto sconto percentuale abbiamo ottenuto sulle bistecche?
   - Sapendo che alla cassa ho pagato le bistecche 36 CHF, determina quale era il prezzo di listino della carne.
7) Un acquario contiene 300 L, lunedì viene riempito del 30% della sua capacità. Il giorno successivo, per un disguido, viene svuotato del 20%. Calcola:
   - Qual è la quantità d'acqua in più rispetto lunedì?
   - Qual è la percentuale l'acqua in più rispetto alla situazione iniziale.
   - Sapendo che l'acquario ha una capacità di 380 L, determina la percentuale d'acqua che devi aggiungere?

8) Una famiglia va a mangiare la pizza al tagliere, sai che
   - Il padre mangia i $\frac{3}{8}$.
   - La madre mangia il 48% della porzione del padre.
   - La figlia maggiore mangia il 150% di ciò che ha mangiato la madre.

Determina:

a) Che percentuale di pizza mangia ciascun membro della famiglia?
b) Il figlio minore, potrà mangiare? Che percentuale?

Problemi con le frazioni.

A) Addizione - sottrazione di frazioni. BM3 esercizi 34 – 35 pag. 79.

1) Nel borsellino ho 160 CHF, spendo prima i $\frac{2}{5}$, poi $\frac{1}{4}$ e da ultimo $\frac{1}{8}$ dell' importo. Quale **parte** della somma ho speso? Quale **parte** della somma mi rimane? **Quale somma** mi rimane? Che **percentuale** rappresenta? $\left[\frac{9}{40}\ ;\ 36\ \text{CHF}\ ;\ 22{,}5\%\right]$

2) Nel borsellino ho 160 CHF, spendo prima i $\frac{2}{5}$, poi $\frac{1}{4}$ del rimanete. Quale somma ho speso in ogni occasione? Quale **somma** mi rimane? Quale **parte** della somma mi rimane? $[72\ \text{CHF}\ ;\ 45\%]$

3) D'una tratta di 480 km, percorro prima il 20% ed inseguito il 50%. Quale parte del tragitto mi rimane da percorrere? Quanti chilometri sono? $\left[\frac{3}{10}\ ;\ 144\ \text{km}\right]$

4) D'una tratta di 480 km, percorro prima il 20% ed inseguito il 50% della parte rimanente. Quale parte del tragitto mi rimane da percorrere? Quanti chilometri sono? $\left[\frac{2}{5}\ ;\ 192\ \text{km}\right]$

5) In un mazzo di 40 carte da gioco italiano qual è la probabilità di :
   a) Pescare un asso.
   b) Pescare un sette?
   c) Pescare una regina?
   d) Pescare un asso **oppure** una regina?
   e) Pescare un asso **oppure** un sette oppure una regina?



Un mazzo di carte da "scala".

6) Per correggere i lavori scritti di una classe composta da 24 allievi il Prof Bianchi impiega 3 h, la sua collega prof.ssa Rossi, invece impiega due ore per svolgere lo stesso lavoro. Determina:
   a) Quanti lavori scritti corregge, mediamente, il pro. Bianchi in un ora? Che parte del lavoro è?
   b) Quanti lavori scritti corregge, mediamente, il prof.sa Rossi in un ora? Che parte del lavoro è?
   c) Se la prof.sa Rossi e il prof. Bianchi si mettessero assieme, quanto tempo impiegherebbero a correggere i 24 lavori scritti?

7) Una scatola contiene 3 triangoli , 5 quadrati e sette rombi. Calcola qual è la probabilità di:
   a) Estrarre un triangolo.
   b) Estrarre un quadrato.
   c) Estrarre un quadrato **oppure** un rombo.
   d) Estrarre un quadrato **e** un rombo.

B) Moltiplicazione. BM3 pag. 81 – 84.

1) Calcola:

a) $\frac{1}{2}$ dei $\left(\frac{3}{4} \text{ di } (1200 \text{ CHF})\right) =$ che posso anche scrivere ; $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\ (1200 \text{ CHF})\right) =$

……

b) I $\frac{3}{4}$ di $\left(\frac{1}{2} \text{ di } 1200 \text{ CHF}\right) =$ che posso anche scrivere ; $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\ (1200 \text{ CHF})\right) =$

……

Conclusione: ……

Come puoi procedere più velocemente?

……

c) 20% del (10% di 1200 CHF) = ;che posso anche scrivere: 20% (10% (1200 CHF)) =

……

d) 10% dei (20% di 1200 CHF) = che posso anche scrivere: 10% (20% (1200 CHF)) =

Conclusione: ……

Come puoi procedere più velocemente?

……

e) $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\ (600 \text{ CHF})\right]\right\}$ = ……

……

f) $10\%\{20\%[30\%(600 \text{ CHF})]\}$ =……

……

g) 3‰ (20% (2'500 km) =……

h) $5‰\left\{40\%\left[\frac{1}{4}(10'000 \text{ CHF})\right]\right\}$ = ……

2) Mangio la metà della metà di una torta. Che parte della torta ho mangiato? Che parte mi rimane?

3) Spendo la metà della metà della somma che possedevo. Che parte mi rimane? Sapendo che mi rimangono 36 CHF, quanti Franchi possedevo? $\left[\frac{3}{4}\ ; 48 \text{ CHF}\right]$

4) D'una tratta percorro prima un mezzo ed inseguito un quarto del rimanente. Che parte ho percorso? Che parte mi rimane d' effettuare? $\left[\frac{3}{8}\right]$

5) D'una tratta percorro prima un mezzo ed inseguito un quarto del rimanente. Sapendo che devo effettuare ancora 27 km, quanto misura ogni tappa? Quanto misura tutto il percorso? [36 km ; 9km; 27km]

6) Acquistando un paio di pantaloni ai saldi ricevo il 10% di sconto, essendo amico del proprietario ricevo un ulteriore sconto del 5% sul prezzo già scontato. Quanto ammonta lo sconto totale? Sapendo che il prezzo di listino era di 200 CHF, quanto ho pagato i pantaloni? Ragiona ! [14,5%; 171 CHF]

7) In un sacchetto hai le lettere R ; M; A ; O . Qual è la probabilità che estraendole una alla volta e non rimettendole, esca la parola Roma? E Ramo? …e Amor?