POLIGONI REGOLARI. (Libro: teoria pag. 52 – 61; esercizi pag. 120 – 128)

Un poligono è detto regolare quando …….

…….

Possiamo costruire un poligono regolare partendo o dalla circonferenza circoscritta al poligono oppure dal lato del poligono.

A) Data una circonferenza inscrivere un poligono regolare.

Esempio: Dividi l'orologio in **sei** parti uguali partendo dalle **tre**.



Puoi risolvere l'esercizio nei seguenti modi:

a) Prendo in considerazioni le ore: ……

……

b) Prendo in considerazioni i minuti: ……

……

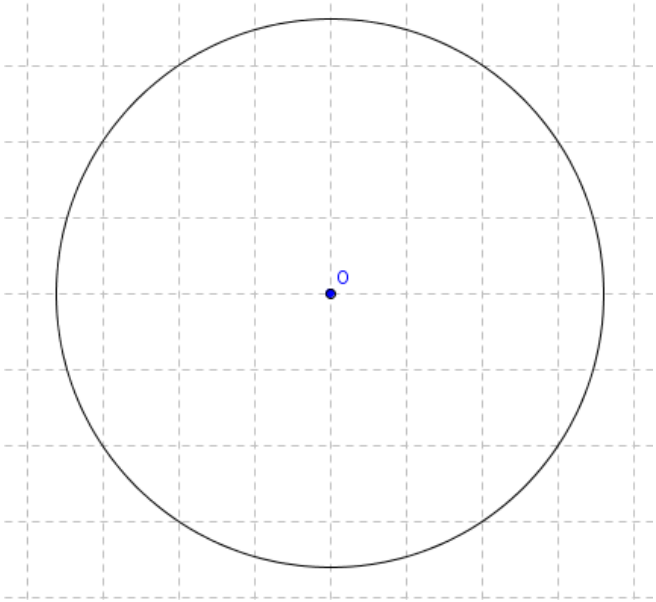
c) Prendo in considerazioni l'angolo giro, cioè …… gradi: ……

……

Con quest'ultimo ragionamento si costruiscono tutti i poligoni regolari, dividendo l'angolo giro in **n parti congruenti,** coincidenti al numero dei lati.

L'angolo, del triangolo isoscele, ottenuto ed avente come vertice il centro della circonferenza, viene contrassegnato con α , gli angoli isometrici del triangolo isoscele vengono contrassegnati con β , mentre con γ l'angolo del poligono.

1) Inscrivere ad una circonferenza un triangolo equilatero.



a) Calcolando i tre angoli:

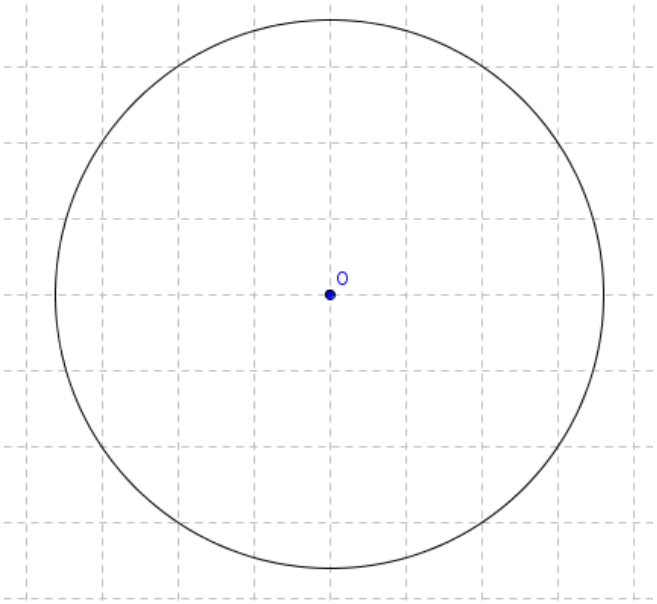
$\alpha =$

……

β……

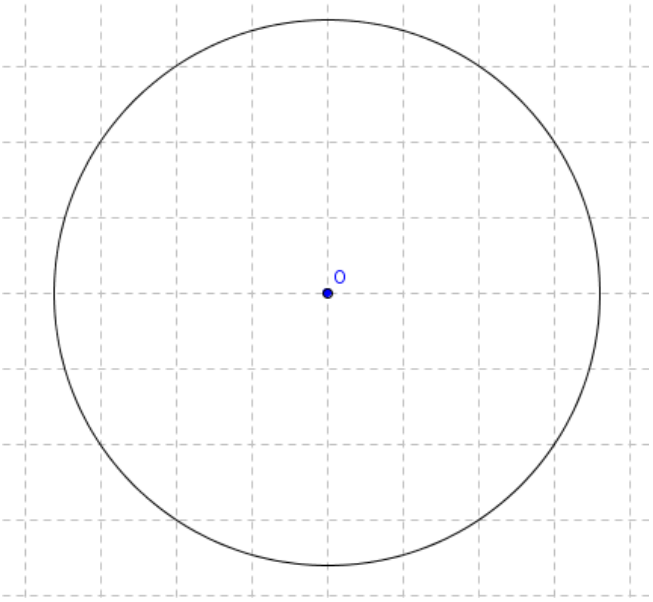
$\gamma =$ ……

b) Utilizzando il raggio.



Metodo:

2) Il quadrato:



$\alpha =$ ……

β ……

$\gamma =$ ……

Quanto misura la somma degli angoli interni del quadrato? Come potresti calcolarla?

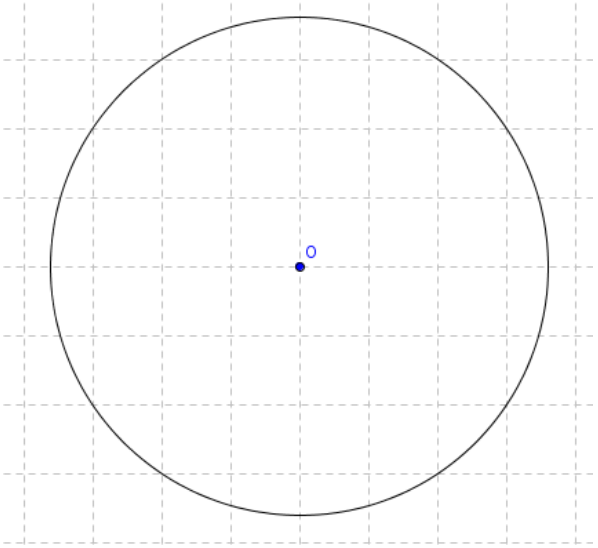
……

……

In generale? Incomincia a pensarci!

……

3) Il pentagono.



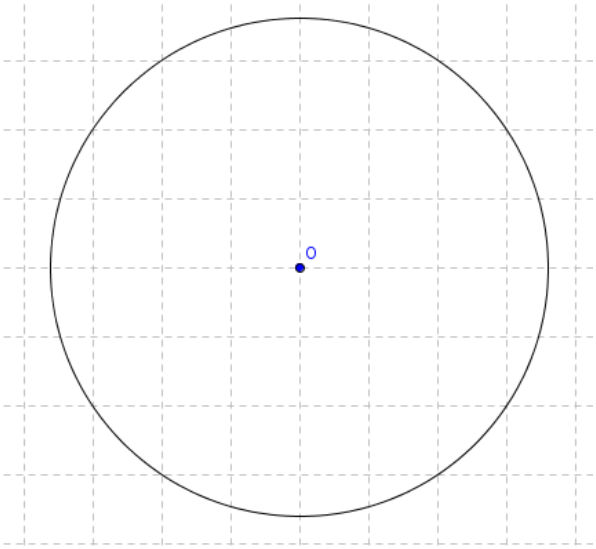
$\alpha =$ ……

β……

$\gamma =$ ……

4) L'esagono.

a) Calcolando i sei angoli.

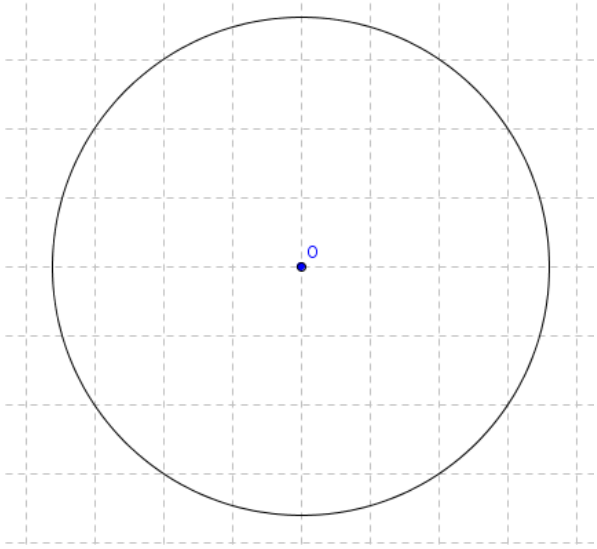


$\alpha =$ ……

β……

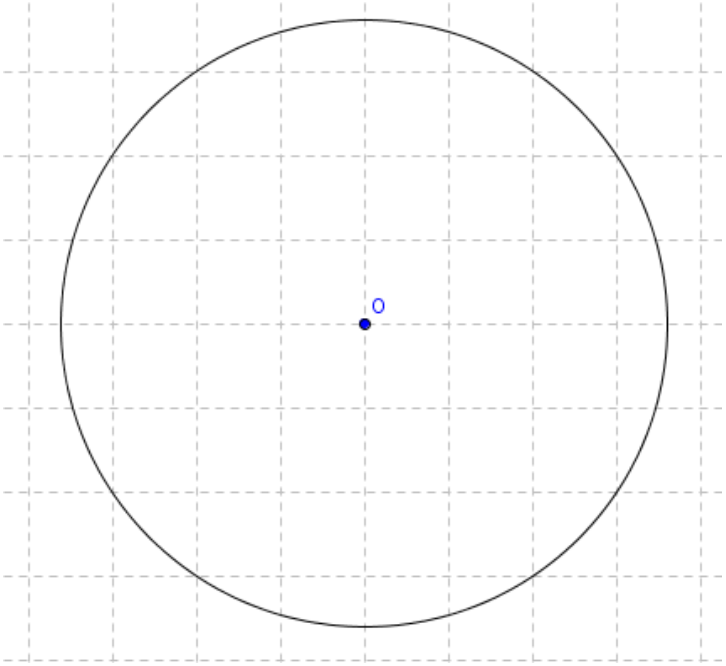
$\gamma =$ ……

b) Utilizzando il raggio.



Metodo.

5) Un poligono con 15 lati (pentadecagono).



$\alpha =$ ……

β……

$\gamma =$ ……

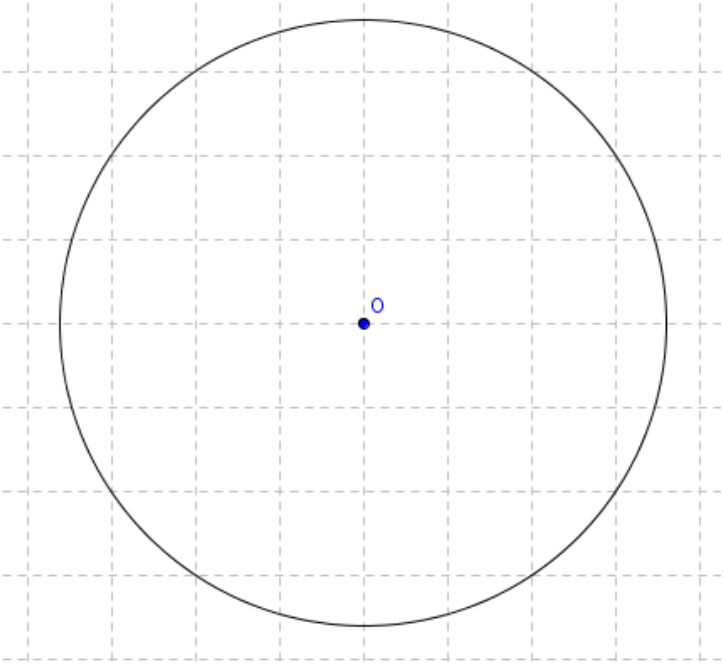
Quanto misura la somma degli angoli interni del pentadecagono? Come potresti calcolarla?

……

In generale?

……

6) Un poligono di 17 lati. (ettadecagono)



$\alpha =$ ……

β……

$\gamma =$ ……

Quanto misura la somma degli angoli interni del ettadecagono? Come potresti calcolarla?

……

In generale?

……

……

……

B) Data il lato, costruire un poligono regolare.

1) Il triangolo equilatero.

a) Disegna il triangolo equilatero ABC di lato $\overline{AB}$.

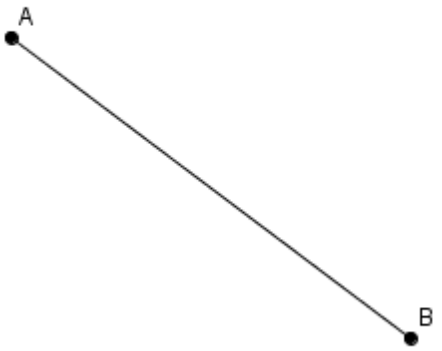
$|AB| =$ cm

$\left|\widehat{ABC}\right| =$

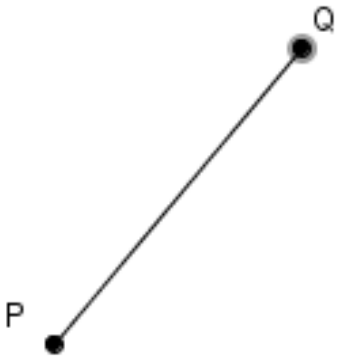
$\left|\widehat{BCA}\right| =$

$\left|\widehat{CAB}\right| =$

$|\hat{\alpha}| + \left|\hat{\beta}\right| + |\hat{\gamma}| =$



b) Disegna nel triangolo equilatero PQR di lato $\overline{PQ}$, le tre bisettrici, le tre altezze, i tre assi. Cosa noti? Costruisci la circonferenza circoscritta e quella inscritta al triangolo.



c) Costruisci:

i) i due triangoli equilateri RMN e PQS di lati $\overline{RM}$ e $\overline{PQ}$.

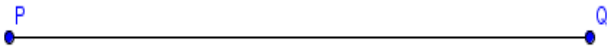
ii) Il circocentro H; e K nei due triangoli.

iii) Costruisci le circonferenze inscritte e circo scritte al triangolo.

iv) Determina i tre triangoli isosceli nei due triangoli equilateri.

v) In ogni triangolo calcola il rapporto tra l'altezza e il lato maggiore cosa noti?





Osservazione:

a) L'altezza del triangolo isoscele è detta **apotema**, ed è il **raggio** della circonferenza **inscritta** al triangolo.

b) Il rapporto tra l'apotema e la base del triangolo isoscele, è costante e determina il **numero fisso** in un poligono regolare. Nel nostro caso:

……

……

Come calcoleresti l'area del triangolo equilatero conoscendo il lato e l'apotema (altezza del triangolo isoscele) ?

……

……

In generale abbiamo dunque:

……

Qual è il rapporto tra il raggio della circonferenza circoscritta e quello del della circonferenza inscritta al triangolo equilatero?

……

……

Conclusione.

Il triangolo equilatero, poligono regolare di …….lati , abbiamo visto che possiede:

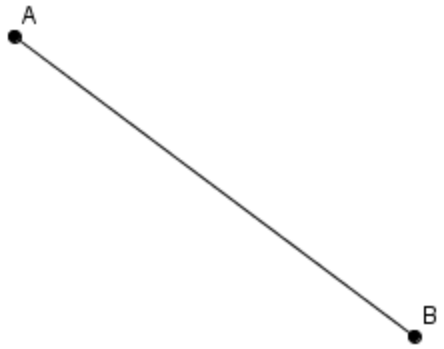
- tre lati …… o …… .
- tre angoli …… o …… ., misurano ……
- tre ……di simmetria.
- Le tre……..; …… e …… s'incontrano …… detto ……., o ……..o ……..o…….
- Di conseguenza è sempre possibile …… un triangolo, e dunque un triangolo è **inscritto ad** ……..; ed il raggio corrisponde alla distanza tra il circocentro e……
- Possiamo anche ……..una circonferenza in un triangolo; ed il raggio corrisponde alla distanza tra l'incentro e……
- Il raggio della circonferenza circoscritta è ……. del raggio della circonferenza inscritta al triangolo. Dunque R = ……r
- Nel triangolo equilatero possiamo costruire ……..triangoli isosceli, dove l'angolo al vertice misura ……. ……., cioè…… e gli angoli alla base misurano ....., cioè……..
- Il rapporto tra altezza del triangolo isoscele , detta ……..,e il alto il lato del triangolo equilatero è detto **numero ……., e** nel triangolo vale…….

In generale:

- Un poligono regolare di **n** …… e **n** …….. possiede. ……. lati …… o …… .
- ……..angoli …… o …… ., misurano ……
- ….. ……di simmetria.
- Gli ……assi; bisettrici s'incontrano ……
- Di conseguenza è sempre possibile …… un poligono regolare di **n lati** , e dunque è un poligono **inscritto ad** ……..; ed il raggio corrisponde alla distanza tra il circocentro e……
- Possiamo anche ……..una circonferenza in un poligono regolare di n lati ; ed il raggio corrisponde alla distanza tra l'incentro e……
- Come cambia il rapporto tra il raggio della circonferenza circoscritta e quello del raggio della circonferenza inscritta ad un poligono regolare di n lati? Ragiona!!!
- In un poligono regolare possiamo costruire ……..triangoli isosceli, dove l'angolo al vertice misura ……. ……..,e gli angoli alla base misurano ....., …….
- Quale conclusione puoi trarre?
- Il numero fisso in un poligono regolare rappresenta……

2) Il quadrato.

a) Disegna il quadrato ABCD di lato $\overline{AB}$.



$|AB| =$ cm

$|AC| =$

$|\hat{\alpha}| + |\hat{\beta}| + |\hat{\gamma}| + |\hat{\delta}| =$

$|\hat{\delta}|$ = ……..= ……

Perimetro =

Area =

b) Dopo aver costruito il quadrato PQRS, costruisci la circonferenza circoscritta e inscritta al quadrato.

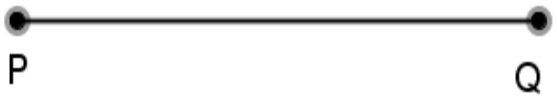
i) Costruisci i triangoli isosceli che formano il quadrato.

ii) Determina la misura dell'angolo al vertice e degli angoli alla base del triangolo isoscele.

iii) Qual è il rapporto tra l'apotema e il lato del quadrato?

iv) Qual è il rapporto tra il raggio della circonferenza circoscritta e quella iscritta al quadrato ?

v) Come potresti calcolare l'area del quadrato considerando i triangoli isosceli?



3) Il pentagono. Costruire il pentagono regolare ABCDE dato il lato AB.

Dato il lato $\overline{AB}$; costruire il pentagono, poligono regolare di 5 lati, inscritto ad una circonferenza.



Procedimento:

a) ……

b) ……

c) ……

d) ……

e) ……

……

……

……

4) Costruire l'esagono regolare ABCDEF dato il lato AB.

Metodo:

$\alpha =$ ……= ……

$\beta =$ ……= ……

$\gamma =$ ……= ……

Somma angoli interni dell'esagono?

Perimetro:



Area:

5) Costruire l'ettagono regolare ABCDEFG dato il lato AB.

Metodo:

$\alpha =$ ……= ……

$\beta =$ ……= ……

$\gamma =$ ……= ……

Somma angoli interni dell'ettagono?

Perimetro:

Area:



6) Costruire l'ennagono regolare ABCDEFGHI dato il lato AB.

Metodo:

α = ……= ……

β = ……= ……

γ = ……= ……

Somma angoli interni dell'ennagono?

Perimetro:



Area:

7) In un poligono regolare è dato l'angolo alla base del triangolo isoscele $\beta = 67{,}5°$, costruisci il poligono? Come si chiama? È sempre possibile costruire un poligono regolare dato un qualsiasi angolo β ?

Metodo:

α = ……= ……

β = ……= ……

γ = ……= ……

Somma angoli interni del poligono?

Perimetro:

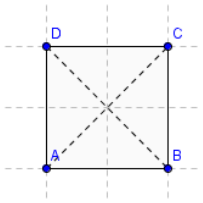
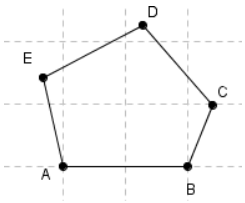
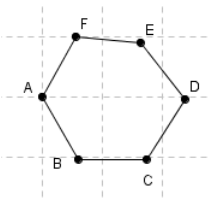


Area:

C) La somma delle misure degli angoli interni di un poligono di n lati.

Ti ricordi che la somma degli angoli interni di un triangolo è ……

In un qualsiasi poligono basta dividerlo in triangoli e con un semplice calcolo riesci a determinare la somma degli angol interni.

Poligono	Quadrato	Pentagono	Esagono	Poligono di n lati.
Figura				
Nr. Triangoli				
Somma tutti gli angoli.				
Somma misura angoli interni.				

Regola: la somma degli angoli interni di un poligono si calcola nel seguente modo:

……

In un pentagono quanto varrà la misure della somma degli angoli interni?

……

In un ennagono (9 lati) quanto varrà la misure della somma degli angoli interni?

……

In un poligono di 32 lati quanto varrà la misure della somma degli angoli interni?

……

La somma delle misure degli angoli interni di un poligono regolare è di 2'340 gradi. Determina il numero dei lati del poligono.

……

……

La somma delle misure degli angoli interni di un poligono regolare è di 3'240 gradi. Determina il numero dei lati del poligono.

……

……

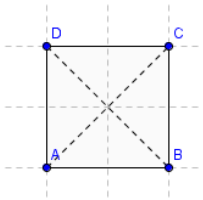
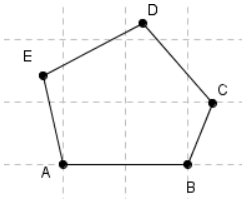
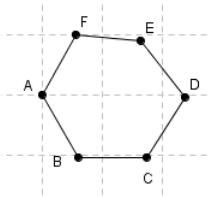
La somma delle misure degli angoli interni di un poligono regolare è di 4'230 gradi. Determina il numero dei lati del poligono.

……

……

D) Le diagonali in un poligono - numero di diagonali.

La diagonale di un poligono è un segmento che congiunge due vertici non consecutivi del poligono.

Poligono	Quadrato	Pentagono	Esagono	Poligono di n lati.
Figura				
Nr. Vertici.				
Nr. diagonali per vertice.				
Nr. Totale diagonali.				
Calcolo.				

Regola: la somma del numero delle diagonali di un poligono si calcola nel seguente modo:

……

Un ettagono (7) quante diagonali avrà ?

……

Un ennagono (9 lati) quante diagonali avrà ?

……

In un poligono di 32 lati quante diagonali avrà?

……

Un poligono ha 14 diagonali. Determina il numero dei lati del poligono.

……

……

Un poligono ha 20 diagonali. Determina il numero dei lati del poligono.

……

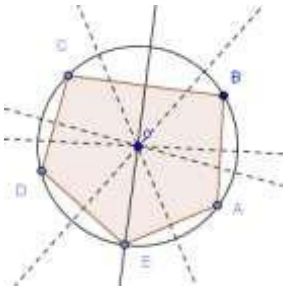
……

È vero che il numero delle diagonali di un poligono è sempre pari?

……

……

E) Poligoni inscritti – circoscritti ad una circonferenza.

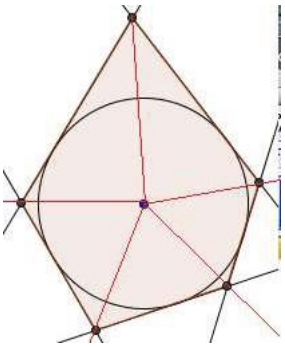


a) Un poligono è **<u>inscritto</u>** in una circonferenza quando tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.

La circonferenza è circoscritta al poligono.

Quando un poligono è inscritto in una circonferenza, il centro della circonferenza coincide con il **<u>circocentro</u>** del poligono (punto d'incontro degli assi del poligono).

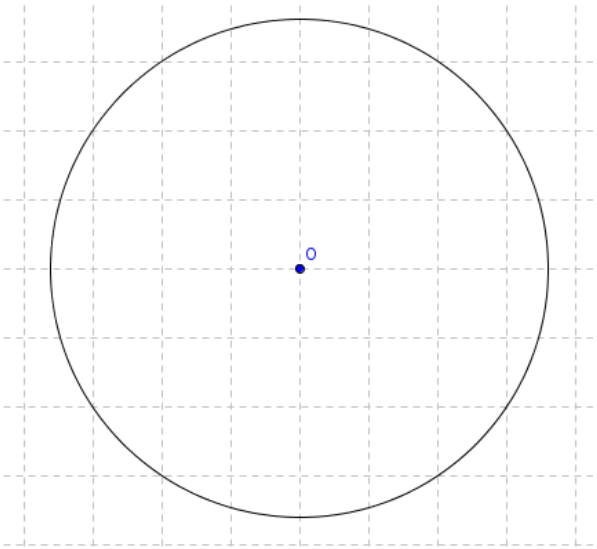
b) Un poligono è **<u>circoscritto</u>** in una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.



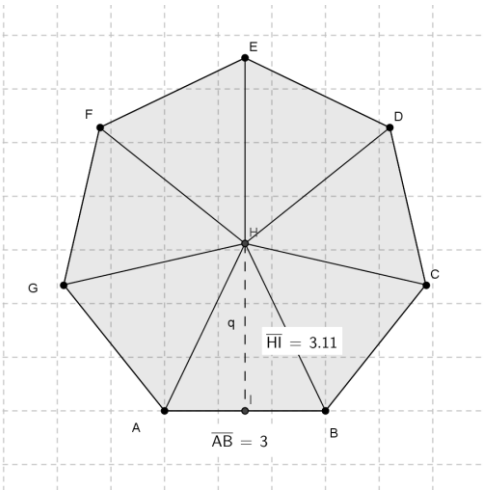
La circonferenza è inscritta al poligono.

Quando un poligono è circoscritto in una circonferenza, il centro della circonferenza coincide con **<u>l'incentro</u>** del poligono (punto d'incontro delle bisettrici degli angoli del poligono). Un poligono è circoscritto in una circonferenza quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

Verifica che un pentagono e un ettagono sono si iscritti che circoscritti ad una circonferenza. Cosa noti?

Pentagono	Ettagono
	

F) L'area di un poligono regolare.



Perimetro ettagono:

……..

In generale: P = …….

Ricorda: l'altezza HI del triangolo ABH, corrisponde all'**apotema** del poligono .

Come calcoli l'area dell'ettagono?

……

$A_{ABH} = \frac{|AB| \cdot |HI|}{2}$ Area ettagono = 7 . $\frac{|AB| \cdot |HI|}{2}$ ma 7 . $|AB|$ = Perimetro dell'ettagono

Dunque A ettagono = $\frac{\text{Perimetro} \cdot |HI|}{2}$; ma $|HI|$ = apotema del poligono

A ettagono = $\frac{\text{Perimetro} \cdot Apotema}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$

Nel nostro caso: A ettagono = ……

In generale l'area di un poligono regolare la si calcola:

A = $\frac{\text{Perimetro} \cdot Apotema}{2} = \frac{P \cdot a}{2}$

Per calcolare l'apotema è utile conoscere il numero fisso del poligono regolare.

Ricorda: il rapporto tra apotema e lato è detto **numero fisso** (f).

Tabella alcuni numeri fissi.

N. lati	Nome	Nr. Fisso
3	Triangolo (Equilatero)	0,28
4	Quadrato	0,50
5	Pentagono	0,68
6	Esagono	0,86
7	Ettagono	1,038
8	Ottagono	1,207
9	Ennagono	1,374
10	Decagono	1,539
11	Endecagono	1,703
12	Dodecagono	1,866

Dati **a** = apotema del poligono ; l = lato del poligono regolare. f = numero fisso abbiamo le seguenti relazioni :

$f = \frac{a}{l}$ **relazioni in verse** **a = f . l** ; $l = \frac{a}{f}$

Completa le seguenti tabelle.

Poligono	Pentagono	Esagono	Ettagono	Ottagon	Ennagono	Decagono
Lato	12 m		7 cm	5 cm		3 dm
Perimetro		54 m			32 mm	
Apotema						

Poligono	Pentagono	Esagono	Ettagono	Ottagon	Ennagono	Decagono
Lato	4 cm	4 cm	4 cm	4 cm	4 cm	4 cm
Perimetro						
Apotema						
Area						

Problemi: Prima di risolvere disegna sempre le figure. Approssima i risultati ai decimi.

a) Una stanza ha forma d' esagono regolare, ha il lato di 23 m. Qual è l'area della stanza? [≅1374,34 m^2]
b) La cappella di una chiesa ha la forma di un ettagono regolare e un lato misura 12,50 m. Calcola la superficie occupata dalla cappella. [≅567, 7m^2]
c) Un'edicola di forma esagonale ha il lato lungo 4 m; appoggia su una base di cemento di forma quadrata con il lato di 8 m che ha la funzione di marciapiede. Quanto spazio rimane da utilizzare come marciapiede? [41,568 m^2; ≅ 22,4 m^2]
d) Il perimetro di un ettagono misura 12,6 dm. Calcola l'area di un quadrato che ha il lato congruente a quello dell'ettagono.
e) Una piazzetta rettangolare destinata ad isola pedonale ha i lati lunghi 25 m e 14 m. È stata abbellita con 9 aiuole ottagonali con il lato lungo 10 dm. Calcola l'area della piazza rimasta libera. [482,8 dm^2; ≅ 2306.6m^2]