Le Funzioni. BM3 pag. 53 – 69; esercizi pag. 129 – 147.

Riassumiamo con una tabella le grandezze considerate negli esempi precedenti.

Esempio	I Grandezza (.....)	II Grandezza (.....)	Relazione (Legame)	Legge?
La scampagnata 1				
La scampagnata 2				
Il ciclomotore				
La telefonia mobile				
Il fosforo.				
La stagione di tennis				
La gita in bus.				
Il serbatoio.				

Quale di questi legami, **relazioni**, possiamo definire in modo preciso ed univoco?

……

……

Noi ci occuperemo, delle relazioni con un legame ben preciso, **le funzioni.**

Il concetto di FUNZIONE.

1) L'insieme delle coppie ordinate – **Il Prodotto cartesiano – Il grafo della relazione.**

Esempio 1:

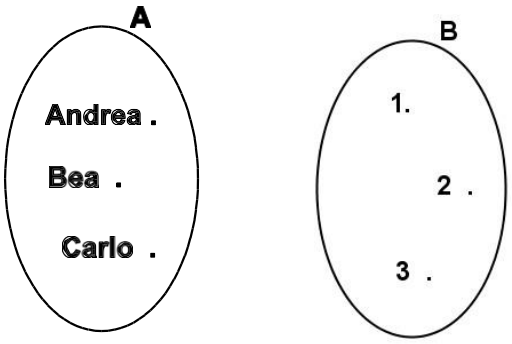
Andrea, Bea e Carlo si sfidano al gioco delle freccette, Quanti e quali sono le possibili classifiche? Come posiamo rappresentarle?

Numero di possibili classifiche: ……

Quale posizione può raggiungere Andrea? ……

Matematicamente scriveremo: ……

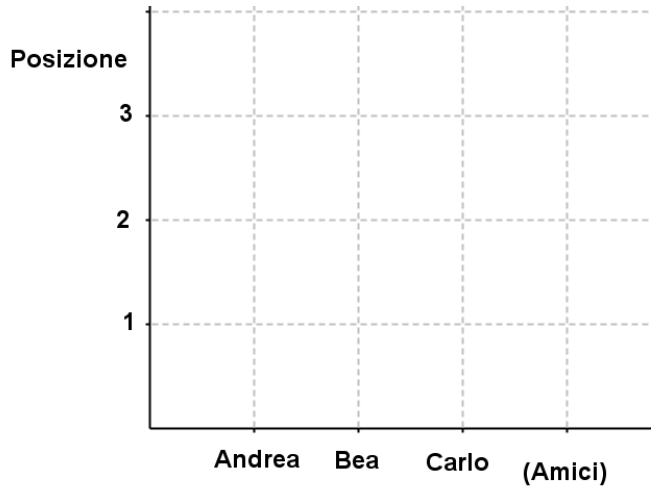
Possiamo rappresentare la situazione con un **diagramma sagittale** (o a frecce)



Considerando tutte le possibili posizioni dei tre amici, otteniamo un insieme di coppie, detto **prodotto cartesiano** tra gli insiemi **A e B**, che matematicamente scriveremo:

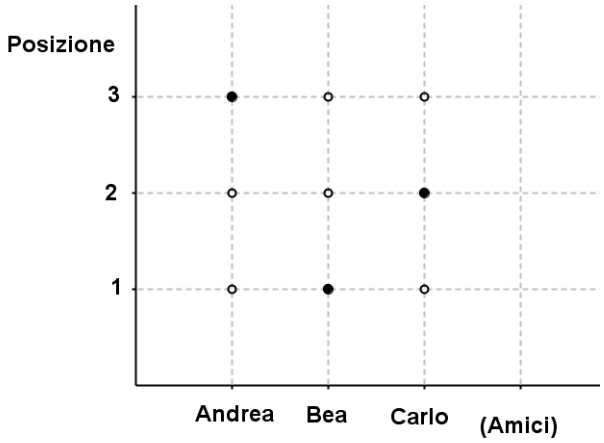
$\mathbf{AxB} = \{(a\,;1)\,;(a\,;2);\ (a\,;3)\,;(\ldots;\ldots);\ (\ldots;\ldots);\ (\ldots;\ldots);\ (\ldots;\ldots);\ (\ldots;\ldots);\ (\ldots;\ldots);\ \}$

Che possiamo raffigurare anche con una **rappresentazione cartesiana**, nel seguente modo:



Chiaramente vi sarà una sola classifica, che logicamente potrai definire nei tre modi precedenti:

a) Con una rappresentazione cartesiana: b) Con diagramma sagittale (o a frecce):

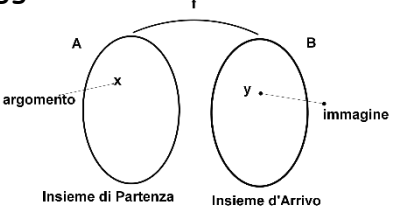


c) Con una rappresentazione in estensione, detta **grafo della relazione**, che matematicamente scriveremo: $G_R = \{(\dots ; \dots) ; (\dots ; \dots) ; (\dots ; \dots) ;\}$

Da bravissimo allievo noterai immediatamente che il Grafo della relazione (G_R) è un ……del prodotto cartesiano (AxB); matematicamente scriveremo: G_T …… AxB.

Matematicamente diremo che abbiamo definito tra gli insiemi A e B, la relazione:

R : "amico che abbia ottenuto un punteggio maggiore rispetto ad un altro concorrente" e scriveremo: $R : A \longrightarrow B$; I punteggi di A maggiore di A_n

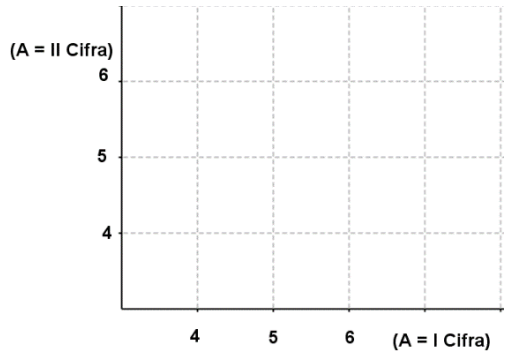


Ricorda! A è **l'insieme di Partenza**, mentre B è **l'insieme d'Arrivo**. Indicheremo con **x**, detto **argomento**, un elemento che appartiene **all'insieme di partenza** e con **y**, detto immagine, un elemento che appartiene **all'insieme d'arrivo**.

Esempio 2:

Dato l'insieme $A = \{4; 5 ; 6\}$ e la relazione: r : A ⟶ A ; se una cifra di A forma un numero pari di due cifre con un'altra cifra di A.

a) Quante sono le possibili coppie che puoi formare?
b) Definisci il prodotto cartesiano AxA =
c) Definisci le coppie che soddisfano la relazione nei tre modi:
   i) Con il diagramma sagittale. ii) Con la rappresentazione cartesiana.

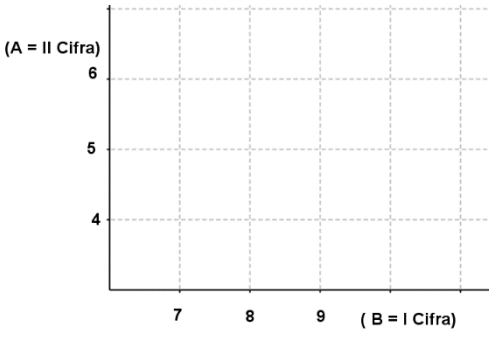


iii) Con il grafo della relazione.

Esempio 3:

Dato l'insieme $A = \{4; 5 ; 6\}$ e $B = \{7; 8 ; 9\}$ la relazione: r : B ⟶ A ; se una cifra di B forma un numero di due cifre dispari con cifra di A.

a) Quante sono le possibili coppie che puoi formare?
b) Definisci il prodotto cartesiano BxA =
c) Definisci le coppie che soddisfano la relazione nei tre modi:
   i) Con il diagramma a frecce. ii) Con la rappresentazione cartesiana.



iii) Con il grafo della relazione.

Quali osservazioni puoi dedurre da questi due esempi?

.....

.....

2) Una relazione particolare – La funzione.

Esempio.

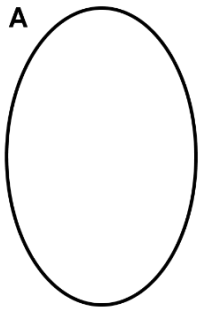
Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}^* \setminus x \leq 6\} = \{\quad\}$ e le seguenti relazioni:

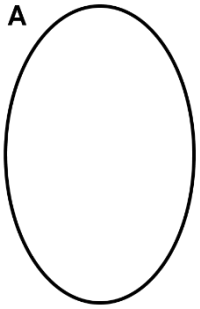
$r_1 : A \longrightarrow A$; $x \in A$ è in relazione con $y \in B$, se x è divisore di y.

$r_2 : A \longrightarrow A$; $x \in A$ è in relazione con $y \in B$, se x è il doppio di y.

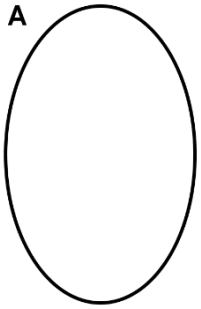
Rappresenta le due relazioni con il diagramma a frecce. Cosa noti?

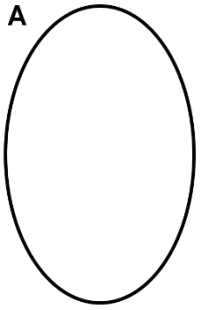
r_1 :





r_2 :





Quali osservazioni puoi dedurre da questi due esempi?

……

……

Si può dedurre che:

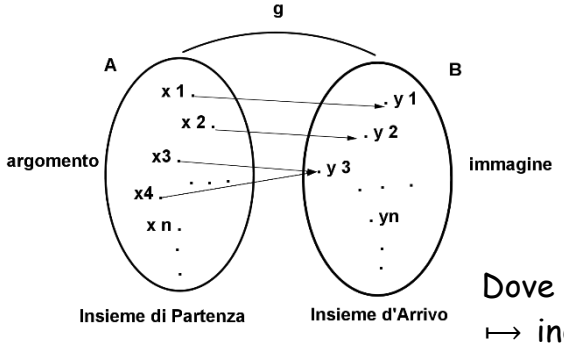
Nella relazione r_1 ogni elemento dell'insieme di partenza ha più immagini nell'insieme d'arrivo, mentre nella relazione r_2 agni elemento dell'insieme di partenza possiede al massimo una immagine nell'insieme d'arrivo.

Matematicamente diremo che r_1 è una semplice relazione, mentre r_2 è **una FUNZIONE.**

Definizione:

Una relazione da un insieme di partenza A verso un insieme d'arrivo B è detta FUNZIONE f, se ad ogni elemento x appartenente all'insieme di partenza A **corrisponde al massimo un elemento** y dell'insieme d'arrivo B.

Osservazione: il nome d'una funzione è normalmente una lettera minuscola diversa dalle variabili (lettere che si usano nel calcolo letterale) e dalle incognite (lettere che si usano nelle equazioni). Esempi: f ; g ; m ; n ; h; k ….



La relazione "g" rappresenta una funzione, matematicamente scriveremo:

$g : A \longrightarrow B$

$x \longmapsto y = g(x)$

Dove la $\longrightarrow$, indica una relazione tra insiemi, mentre $\longmapsto$ indica una relazione tra elementi.

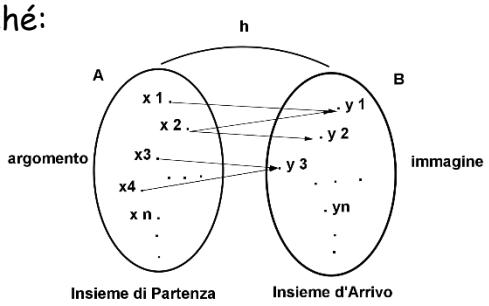
Avremo: $g(x_1) = y_1$; $g(x_2) = y$…… ; $g(x$……$) = y_3$; : $g(x_4) = y$…… ;

E si legge: y_1 è l'immagine di x_1 secondo la funzione g.

La relazione "h", non rappresenta una funzione poiché:

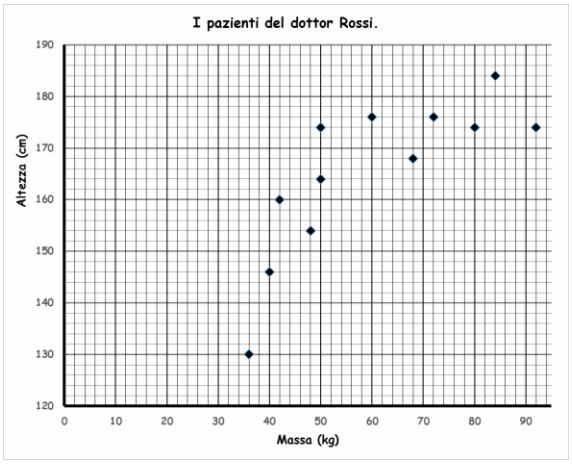
$h(x_2)$ = ……; ma anche $h(x_2)$ = ……;

dunque l'elemento x_2 possiede due immagini, di conseguenza la relazione h non rappresenta una funzione.

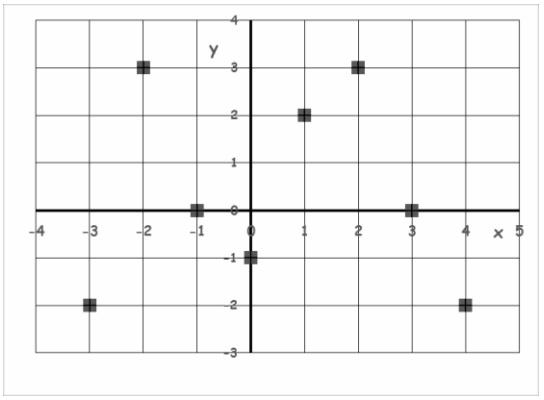


Esercizio: Indica se le seguenti relazioni possono essere considerate rappresentazioni di funzioni. Definisci inseguito l'insieme di Partenza, l'insieme d'Arrivo e la relazione; determina, inseguito, il Grafo della relazione e compila la tabella.

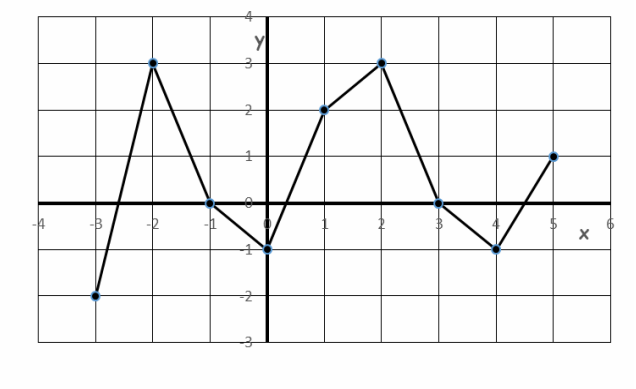
a)



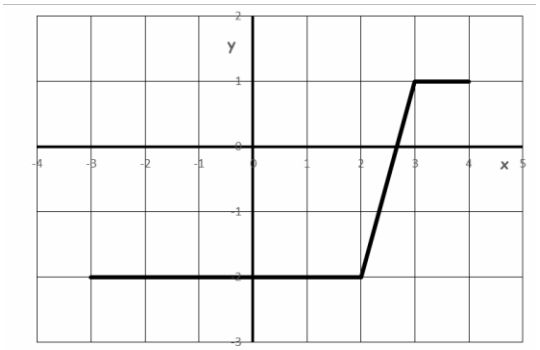
b)



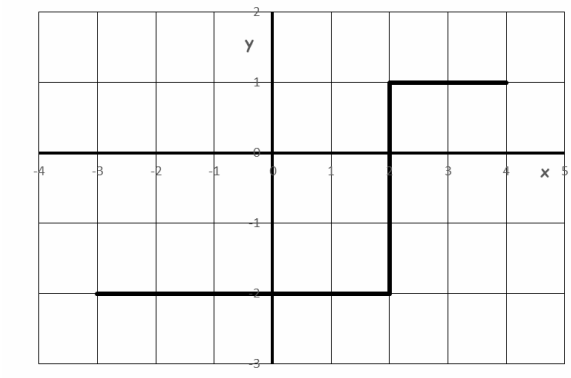
c)



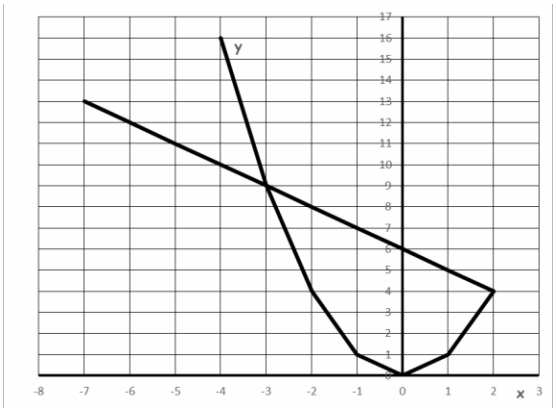
d)



e)



f)



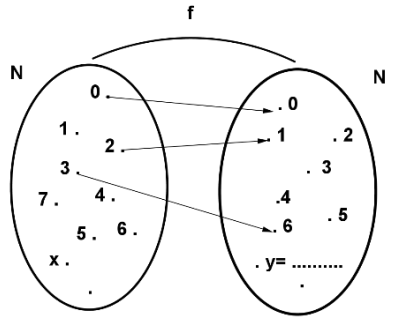
Esercizio: stabilire nei seguenti esempi se il criterio di corrispondenza tra gli elementi può essere considerato quello d'una funzione.

a) L'insieme delle nazioni e le rispettive capitali.
b) A = {Milano; Roma ; Torino; Madrid ; Barcellona; Londra} e l'insieme della rispettive squadra di calcio che giocano nella massima serie della propria nazione.
c) L'insieme dei giocatori famosi di calcio e le rispettive squadre di Club.
d) L'insieme dei giocatori famosi di calcio e le rispettive squadre di Nazionale.
e) L'insieme degli utenti e dei rispettivi numeri di cellulare.
f) L'insieme degli allievi della tua classe e il rispettivo numero di scarpe.
g) L'insieme degli allievi della tua classe e il rispettivo anno di nascita.
h) L'insieme dei numeri naturali e la rispettiva metà.
i) L'insieme dei numeri razionali e la rispettiva metà.
j) L'insieme dei numeri reali e la rispettiva metà.

3) La rappresentazione d'una funzione.

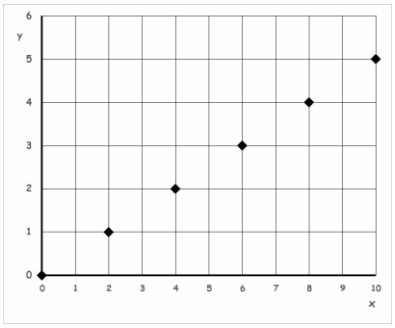
Una funzione come una relazione può essere rappresentata:

a) Con un diagramma sagittale



……

b) Rappresentazione cartesiana.



……

c) Con il grafo della funzione

$G_f = \{ \quad \}$

d) Con una tabella.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0		1		2		3		4		5

Possiamo ora definire in modo matematico la precedente relazione con **la forma algebrica della funzione**, nel seguente modo:

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ si legge : funzione f, definita da N verso N.
$x \longmapsto \frac{1}{2}x$ si legge : x verso $\frac{1}{2}$ di x .
$x \longmapsto y = \frac{1}{2}x$ si legge : x verso y uguale ad $\frac{1}{2}$ dix .
Oppure: $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{2}$ si legge : x verso f di x uguale $\frac{1}{2}$ di x.

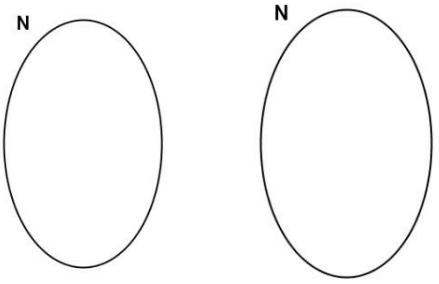
Osservazione: Cosa capita se cambi l'insieme di definizione d'una funzione? È importante? Perché?

4) L'insieme di Definizione (Dominio) d'una funzione.

Esempio 1:

Data la funzione h_1: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $x \mapsto y = 8 - x$

Rappresenta la funzione h_1 con il diagramma sagittale. Cosa noti?



……

……

……

Abbiamo dunque:

Insieme di Partenza: ……

Insieme d'Arrivo : ……

Insieme di definizione – Dominio: $\mathbf{D_{h1}}$= ……

Insieme delle Immagini – Codominio $\mathbf{Im_{h1}}$=……

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$=……; $\mathbf{Im_{h1}}$= ……..

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Razionali $\mathbb{Q}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$=……; $\mathbf{Im_{h1}}$= ……..

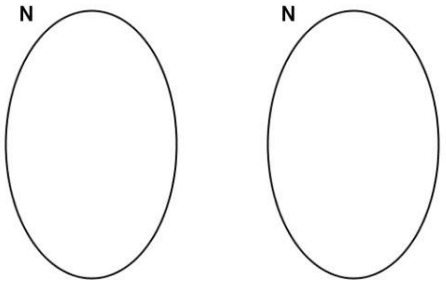
Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$=……; $\mathbf{Im_{h1}}$ = ……..

Esempio 2:

Data la funzione h_2: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $x \mapsto y = \frac{8}{x}$

Rappresenta la funzione h_2 con il diagramma sagittale. Cosa noti?



……

……

……

Abbiamo dunque:

Insieme di Partenza: ……

Insieme d'Arrivo : ……

Insieme di definizione – Dominio : ……

Insieme delle Immagini – Codominio : ……

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$=……; $\mathbf{Im_{h2}}$= ……

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Razionali $\mathbb{Q}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$=……; $\mathbf{Im_{h2}}$= ……..

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$=……; $\mathbf{Im_{h2}}$= ……..

Esercizio determina il dominio e il codominio delle seguenti funzioni.

$f_1: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; x \mapsto y = \frac{8-x}{2}$; $f_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; x \mapsto y = \frac{8}{x-1}$;

$f_3: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}; x \mapsto y = \frac{8-x}{2}$; $f_4: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}; x \mapsto y = \frac{8}{x-1}$;

$f_5: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}; x \mapsto y = \frac{8-x}{2}$; $f_6: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}; x \mapsto y = \frac{8}{x-1}$;

$f_7: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; x \mapsto y = x^2$; $f_8: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}; x \mapsto y = \sqrt{8-x}$;

Esempio 3:

Data la funzione reale: $g_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y = \frac{8}{x-1}$; determina il dominio

……

……

Ricorda: il (o i) valore (i) che annullano il denominatore vanno sempre esclusi dal Dominio della funzione, nel nostro caso $D_{g1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Se il dominatore è formato da più fattori, dovrò escludere dal dominio tutti i valori che l'annullano.

Esempi.

a) Data la funzione reale: $g_2: x \mapsto y = \frac{8}{x(x-1)}$; calcola i valori che annullano il denominatore: x (x -1)= 0 ; da cui ……

Il dominio sarà: $D_{g2} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ che posso anche scrivere: $D_{g2} = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ $8-x$

b) Data la funzione reale: $g_3: x \mapsto \frac{8-x}{(x+2)(x-1)}$; calcola i valori che annullano il denominatore: (2 + x) (x - 1)= 0 ; da cui segue:……

……

Il dominio sarà: $D_{g3} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Esempio 4.

Data la funzione reale $m: x \mapsto \sqrt{x-2}$ determina il dominio.

……

……

Osservazioni:

……

Esercizio determina il dominio delle seguenti funzioni reali.

$k_1: x \mapsto \frac{8}{x+8}$; $k_2: x \mapsto \frac{x-8}{x}$; $k_2: x \mapsto \frac{x-8}{x\cdot(x+8)}$; $k_3: x \mapsto \frac{x}{(x-8)\cdot(x+8)}$; $k_4: x \mapsto \frac{(x-8)\cdot(x+8)}{x}$

$m_1: x \mapsto \sqrt{x}$; $m_2: x \mapsto \sqrt{x-2}$; $m_2: x \mapsto \sqrt{2-x}$; $m_3: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$; $m_4: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-2}}$