4) I Numeri Irrazionali. I BM3 pag. 13 – 16. Es. pag. 73 - 74

Un numero è detto irrazionale quando è **non possibile** definirlo sotto forma di frazione, non ammette dunque una rappresentazione decimale finita o periodica.

Esempio : $\sqrt{2} \cong$ ……; $\sqrt[3]{4} \cong$ ……; $\sqrt[4]{8} \cong$ ……;

$\pi \cong$ ……; $\sqrt{\pi} \cong$ ……; $e \cong$ ……;

oppure anche : 1,2324252627282920…… ; 7,36912151821…… ……; 2,01491625……..

Inventa due numeri irrazionali: ……; ……;

Completa con $\in$; $\notin$; $\not\subset$; $\subset$

i) +2 ……I

ii) I ……$\mathbb{Q}$

iii) $-\frac{5}{7}$ ……I

iv) $-\frac{5}{7}$ ……$\mathbb{Q}$

v) $\sqrt{5}$……$\mathbb{Q}$

vi) $\sqrt{5}$……I

vii) $\sqrt{64}$……I

viii) $\sqrt[3]{9}$……$\mathbb{Z}$

ix) π……I

x) $\sqrt[3]{27}$……I

xi) $\sqrt[3]{8}$……$\mathbb{N}$

xii) $\sqrt[3]{9}$……I

Osservazione: la scrittura $\sqrt{2}$, rappresenta il valore **non approssimato** della radice quadrata di due; mentre 1,41 rappresenta il **valore approssimato ai centesimi** della radice e scriveremo $\sqrt{2} \cong 1{,}41$. Nella risoluzione degli esercizi dovrai scrivere le due forme. Utilizzando la calcolatrice approssimare i seguenti numeri irrazionali alla cifra richiesta.

Radicale	Intero	Decimo	Centesimo	Millesimo
$\sqrt{68}$				
$\sqrt{137}$				
$\sqrt[3]{68}$				
$\sqrt[4]{100}$				
π				
$7\,\pi$				
8,2e				

Cosa ottengo se ad un numero razionale aggiungo o tolgo un numero irrazionale?

1+ $\sqrt{2}$ = ……; $\frac{1}{2}$ - $\sqrt[3]{4}$ =……;$\sqrt[4]{8}$ - $2,\overline{5}$ = ……;

Conclusione: ……

Cosa ottengo se sommo due numeri irrazionali?

$\sqrt{2}$ + $\sqrt[3]{4}$ = ……; π + e = ……;

(1+ $\sqrt{2}$) + (1- $\sqrt{2}$) = …… ; (π + $\frac{1}{2}$) + (- π + $\frac{1}{2}$) = ……

Conclusione: ……

Cosa ottengo se moltiplico un numero razionale con un numero irrazionale?

2. $\sqrt{2}$ = ……; $\frac{1}{2}$. $\sqrt[3]{4}$ =……;$\sqrt[4]{8}$. $2,\overline{5}$ = ……;

Conclusione: ……

Cosa ottengo se moltiplico due numeri irrazionali?

$\sqrt{2}$. $\sqrt[3]{4}$ = ……; π . e = ……;

$\sqrt{7}$. $\sqrt{7}$ = …… ; (1+ $\sqrt{2}$) . (1- $\sqrt{2}$) = ……

Conclusione: ……

Proprietà dei radicali. (Radici)

a) Il prodotto di radicali.

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$ $\qquad \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt{3^3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^3 \cdot 3} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$ $\qquad \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^5} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

Con le lettere procedo allo stesso modo

$\sqrt{3a} \cdot \sqrt{12b} = \sqrt{3a \cdot 12b} = \sqrt{36 \cdot ab} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{ab} = 6\sqrt{ab}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} =$ ……

$\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{32} =$ ……

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} =$ ……

$\sqrt{2xy} \cdot \sqrt{8x^2y} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{4x} \cdot \sqrt[3]{16y} =$ ……

Regola: ……

Cosa capita se i radicali sono identici?

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{3^2} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ $\qquad \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$

$\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} =$ ……

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{y} =$ ……

$\sqrt{2x} \cdot \sqrt{2x} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{5y} \cdot \sqrt[3]{5y} \cdot \sqrt[3]{5y} =$ ……

Regola: ……

Questa proprietà ci permette **<u>d'estrarre</u>** uno o più fattori dal radicale.

Esempio:

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cong 3{,}46 \cong 3{,}5$
- $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} \cong 2{,}52 \cong 2{,}5$

$\sqrt{50} =$ $\qquad \sqrt{72} =$

$\sqrt[3]{40} =$ $\qquad \sqrt[3]{250} =$

Con le potenze capita la stessa cosa.

$\sqrt{2^4 \cdot 3^3} =$ $\qquad \sqrt{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5} =$ $\qquad \sqrt{2^{21} \cdot 3^{25} \cdot 5^9} =$

$\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3} =$ $\qquad \sqrt[3]{2^7 \cdot 3^5 \cdot 5} =$ $\qquad \sqrt[3]{2^{21} \cdot 3^{25} \cdot 5^9} =$

Con le lettere si procede allo stesso modo:

$\sqrt{x^{14}y^{13}} =$ $\qquad \sqrt{m^9\, n^8 p^2} =$ $\qquad \sqrt{90a^{31}b^{15}c^{19}} =$

$\sqrt[3]{x^4\, y^3} =$ $\qquad \sqrt[3]{8d^7e^5f} =$ $\qquad \sqrt[3]{54a^{21}b^{25}c^9} =$

Regola: ……

Svolgi le seguenti moltiplicazioni mettendo il risultato nelle due forme:

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5 \cdot 8} = \sqrt{40} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \cong 6{,}33$

$\sqrt[3]{30} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{30 \cdot 9} = \sqrt[3]{270} = \sqrt[3]{27 \cdot 10} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{10} = 3\sqrt[3]{10} \cong 6{,}46$

$\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{14} =$ ……

$\sqrt{24} \cdot \sqrt{38} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{12} =$ ……

$\sqrt{5x} \cdot \sqrt{8y} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{20x} \cdot \sqrt[3]{6y} =$ ……

$\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{12a^3} =$ …… $\qquad \sqrt[3]{4x^5y^2} \cdot \sqrt[3]{6x^2y^3} =$ ……

Come dovrò procedere per reintrodurre il fattore sotto il segno di radice?

$5\sqrt{3}$ =……; $5\sqrt[3]{2}$ =……;$5x\sqrt{3y}$ =……;

Introduci il fattore sotto il segno di radice: $3\sqrt{5}$ = ; $3^4\sqrt{3}$ = ; $2a^3b\sqrt{3ab}$ =

b) Quoziente di radicali.

$\sqrt{72} : \sqrt{8} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{72}{8}} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$\sqrt{3} : \sqrt{12} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{80} = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{80}} = \sqrt[3]{\frac{10}{80}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

Con le lettere procedo allo stesso modo

$\sqrt{24a^5} : \sqrt{6a} = \frac{\sqrt{24a^5}}{\sqrt{6a}} = \sqrt{\frac{24a^5}{6a}} = \sqrt{4a^4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} = 2a^2$

$\sqrt{24a^5} : \sqrt{6a} = \frac{\sqrt{24a^5}}{\sqrt{6a}} = \sqrt{\frac{24a^5}{6a}} = \sqrt{4a^4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} = 2a^2$

Regola: ……

Con lo stesso procedimento calcola il quoziente dei numeri irrazionali, e verifica la soluzione con la calcolatrice.

$\sqrt{32} : \sqrt{2}$ = …… ..

$\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{32}$ = ……

$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$ = ……

$\frac{\sqrt[3]{56}}{\sqrt[3]{189}}$. = ……

$\frac{\sqrt{x^{15}}}{\sqrt{x^7}}$. = ……

$\sqrt[3]{16x} : \sqrt[3]{2x^4}$ = ……

$\sqrt{6x^8y^2} : \sqrt{294x^2y^{10}}$ = ……

$\sqrt[3]{4m^5n^4} : \sqrt[3]{500m^2n}$ = ……

Ma non è sempre festa…

c) La razionalizzazione.

$\sqrt{8} : \sqrt{24} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Prova ad amplificare la frazione $\frac{1}{\sqrt{3}}$ per 3 ; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$ cosa noti?

……

……

……

Regola: ……

Razionalizza le seguenti frazioni:

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{3}{\sqrt{6}}$ = $\frac{5}{\sqrt{10}}$ = $\frac{5}{\sqrt{20}}$ = $\frac{3a^2}{\sqrt{a}}$ = $\frac{4}{\sqrt{2a}}$ =

Cosa capita in queste occasioni?

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ = ……

$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ =……

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ =……

d) Addizione - sottrazione di radicali.

L'addizione di radicali si svolge come l'addizione nel calcolo letterale, sommo cioè i monomi simili, estraendo però prima tutti i fattori possibili dalla radice.
esempio 7a + 5b – a + 4b = 7a – a + 5b + 4b = (7 - 1)a + (5 + 4)b = 6a + 9b

$7\sqrt{2}$ + $5\sqrt{3}$ - $\sqrt{2}$ + $4\sqrt{3}$ = $7\sqrt{2}$ - $\sqrt{2}$ + $5\sqrt{3}$ + $4\sqrt{3}$ = (7 – 1) $\sqrt{2}$ + (5 + 4) $\sqrt{3}$ =
=6$\sqrt{2}$ + 9$\sqrt{3}$ = 3 (…….$\sqrt{2}$ + ….$\sqrt{3}$)

$\sqrt{12}$ + $\sqrt{75}$ = $\sqrt{4\,.3}$ + $\sqrt{25\,.3}$ =$\sqrt{4}$.$\sqrt{3}$ + $\sqrt{25}$.$\sqrt{3}$ = 2 .$\sqrt{3}$ + 5.$\sqrt{3}$ = 7$\sqrt{3}$

Semplifica le seguenti espressioni con i radicali:

i) $5\sqrt{3}$ + $2\sqrt{7}$ - $2\sqrt{3}$ - $5\sqrt{7}$ =

ii) $8\sqrt[3]{4}$ + $3\sqrt[3]{6}$ - $7\sqrt[3]{4}$ - $9\sqrt[3]{6}$ =

iii) $2.\left(\sqrt{5}-1\right)+3(2-\sqrt{5})$ =

iv) $\sqrt{8}$ + $\sqrt{50}$ - $\sqrt{98}$ =

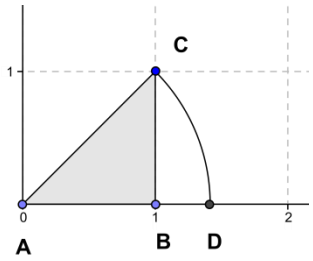
v) $\sqrt{18}$ + $\sqrt{50}$ - $\sqrt{98}$=

vi) $\sqrt{8x^2}$ - $\sqrt{50x^2}$ + $\sqrt{98x^2}$ =

vii) -$\sqrt{8x^3}$ + $\sqrt{50x^3}$ + $\sqrt{98x^3}$ =

viii) $\sqrt{x^3}$ + $\sqrt{x^5}$ - $\sqrt{x^7}$

e) La rappresentazione d'un qualche numero irrazionale sulla retta numerica.



Rappresenta sul piano cartesiano (u = 4q) i punti
A (0 ; 0) ; B (1 ; 0) e C (1 ; 1) , collega i punti AC,
ottenendo ……del triangolo ABC.
Sfruttando il teorema di Pitagora calcola:
$|AC| =$ …… ,
Riporta con li compasso la distanza sull'asse delle ascisse ed ottiene D (……; …….)
Esercizio : rappresenta i seguenti punti E ($\sqrt{3}$; 0) F ($\sqrt{5}$; 0) ; H (0 ; $\sqrt{3}$)

Ricerca: La chiocciola di Pitagora – la spirale di Teodoro.

5) I Numeri Reali. $\mathbb{R}$

a) L'unione dell'insieme dei numeri Razionali con l'insieme dei numeri Irrazionali forma l'insieme dei numeri Reali, con il simbolo $\mathbb{R}$, matematicamente scriveremo:

$\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$ Con il diagramma di Venn abbiamo.

con $\mathbb{Q} \cap I = \cdots \ldots \ldots \ldots$;

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cdots \ldots \ldots \ldots$

$\mathbb{R} \setminus I = \cdots$

b) Le operazioni con i numeri reali.

Con i numeri reali possiamo svolgere le operazioni già incontrate negli altri insiemi.

Esempi:

i) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125} + \sqrt{180} =$; ii) $\left(2\sqrt{5} + \sqrt{8}\right) \cdot \left(2\sqrt{5} - \sqrt{8}\right) =$

iii) $\sqrt{x^3} + \sqrt{4x^3} - \sqrt{125x^3} + \sqrt{180x^3} =$; iv) $\left(2\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) \cdot \left(2\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) =$

v) $3\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) =$

c) La razionalizzazione.

Abbiamo visto che razionalizzare una frazione vuol dire determinare una frazione equivalente avente il denominatore intero. Si presentano diversi casi.

$\frac{3}{\sqrt{6}} =$ …… = ……= …… ; $\frac{4}{\sqrt{8}} =$ …… = ……= …… ;

$\frac{a}{\sqrt{a}} =$ …… = ……= …… ; $\frac{x^2}{\sqrt{x^3}} =$ …… = ……= ……

$\frac{3}{2\sqrt{6}} =$ …… = ……= …… ; $\frac{4}{3\sqrt{8}} =$ …… = ……= …… ;

$\frac{3a}{\sqrt{6a}} =$ …… = ……= …… ; $\frac{2x^2}{\sqrt{8x^3}} =$ …… = ……= ……

$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; $\frac{4-\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$;

Se al denominatore avessimo una radice cubica.

$\frac{3}{\sqrt[3]{6}} =$ …… = ……= …… ; $\frac{4}{\sqrt[3]{4}} =$ …… = ……= …… ;

$\frac{a}{\sqrt[3]{a}} =$ …… = ……= …… ; $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} =$ …… = ……= ……

Semplifica le seguenti espressioni, razionalizzando il risultato.

i) $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{20} - \frac{5\sqrt{80}}{\sqrt{2}} =$

ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} =$

Risolvi il seguente problema applicando le regole di calcolo dei radicali.

i) Un triangolo rettangolo ha i cateti uno doppio dell'altro, calcola:

- La misura dell'ipotenusa.
- L'area del triangolo rettangolo. Cosa noti?
- Il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo rettangolo
- L'area del cerchio circoscritto al triangolo.
- Il rapporto tra l'area del triangolo rettangolo e l'area del cerchio circoscritto al triangolo stesso, in forma non approssimata.

d) Equazioni con numeri irrazionali – reali.

Osservazione: Le equazioni con i radicali rispettano le identiche regole che ben conosci utilizzate negli altri insiemi.
Risolvi in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni, specificando l'insieme soluzione.

Abbiamo due possibilità:

- Equazioni con coefficienti numerici irrazionali

i) $2x = \sqrt{8}$ ii) $x\sqrt{8} = 2$ iii) $x\sqrt{5} - 10 = 0$
iv) $3x - \sqrt{27} = 0$ v) $\sqrt{3}\, x = \sqrt{12}$
vi) $\frac{x}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}$ vii) $\frac{2x}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}$
viii) $\sqrt{3}\left(x - \sqrt{6} - 1\right) = \sqrt{3}\,(1 - x) + \sqrt{18}$ ix) $\sqrt{2}\left(x + \sqrt{5}\right) = x - \sqrt{10} + 2\sqrt{5}$

- Equazione con l'incognita sotto il segno di radice n-esima.
  Ricorda risolvendo un'equazione svolgi l'operazione inversa, dunque in questo caso l'operazione inversa dell'estrazione di radice è ……
  Attenzione il radicando deve rispettare alcune condizioni, che vedremo.

$i)\ \sqrt{x} = 4$ ii) $\sqrt[3]{x} = 4$ iii) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$
iv) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{5}$ v) $2\sqrt{10} + \sqrt{x} = 0$
vi) $\frac{2}{\sqrt{x}} = 1$ vii) $\frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

Attenzione:
Si possono risolvere equazioni con l'incognita sotto radice quadrata, unicamente se il radicando (la parte sotto la radice) è positiva! Dunque $x \geq 0$, oppure $x > 0$!
O …… vedremo !

e) Approfondimenti

i) La "doppia" razionalizzazione
Il denominatore è formato dalla somma d'un numero irrazionale con un numero razionale. Es : $\frac{4}{\sqrt{3}-1} =$

Dobbiamo definire una frazione equivalente con il denominatore intero, proviamo a procedere come abbiamo fatto finora, vale a dire moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\sqrt{3}$, cosa capita?

$\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt{3}} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} =$

Osservazione: ……
……

Dobbiamo procedere dunque in un altro modo, considerando il seguente prodotto
Ricorda: (a + b) . (a – b) =
Dunque per razionalizzare il denominatore $\sqrt{3} - 1$ dovremo moltiplicarlo per ……
otteniamo: $\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) =$

$\frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{4 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$

Razionalizza: $\frac{5}{\sqrt{2}-1} =$; $\frac{10}{\sqrt{6}+1} =$; $\frac{\sqrt{10}}{1-\sqrt{6}} =$; $\frac{24}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} =$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} =$; $\frac{2}{\sqrt{a}-1} =$; $\frac{2a}{\sqrt{a}-b} =$; $\frac{y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

ii) Condizione d'esistenza d'un radicale.

6)
7)