Il calcolo letterale – algebrico. (CM teoria - esercizi pag.324 –351)

Il calcolo letterale, o algebrico, è quella parte della matematica che **generalizza** il calcolo numerico utilizzando delle lettere per indicare dei numeri.

Introduzione: prova a svolgere il seguente gioco.

Pensa un numero
moltiplicalo per 3
aggiungi 4 al risultato
a quello che hai ottenuto aggiungi ancora il numero di partenza
dividi quello che ottiene per 4
togli il numero che hai pensato all'inizio, ed ottieni?

Trasforma:

i) Le seguenti frasi in espressioni letterali.

a) la soma del doppio di a con la metà di b.
b) La differenza dei numeri a e b.
c) Un terzo di n diminuito di 2.
d) Il prodotto di $\frac{2}{5}x$ per $\frac{25}{8}y$.
e) Il 35% del numero x.
f) Il precedente di $3x^2$.
g) Il consecutivo di $\frac{2}{5}x$.
h) La metà di $\frac{2}{5}x$ sommata al suo triplo.

ii) Le seguenti espressioni letterali in frasi.

a) $x + 2x =$ b) $x^2 + 2x =$ c) $n + (n + 1) + (n + 2) =$ d) $t + (t - 1) =$

Le lettere servono specialmente a scrivere delle formule e a risolvere dei problemi, **generalizzano** dunque una situazione.

Esempi:

a) L'area del triangolo.
b) L'area d'un triangolo equilatero, dato il lato.
c) Il teorema di Pitagora.
d) La diagonale del cubo.
e) La densità della popolazione
f) L'indice di massa corporea.
g) Il costo del pieno di benzina, sapendo che un litro costa 1,40 CHF.
h) Il costo delle chiamate al telefono, conoscendo il costo al minuto.
i) Andrea, Bea e Carlo sono tre fratelli; definisci la loro età sapendo che Andrea ha due anni meno di Bea e che Carlo ha il triplo degli anni d'Andrea. Quale sarà la somma delle loro età?
j) Spendo prima i $\frac{2}{11}$ d'una somma, ed inseguito i $\frac{2}{9}$ della somma rimanente; che parte mi rimane?

Al posto delle lettere (variabili) possiamo dunque sostituire dei numeri, ma ricorda:

- Lettere diverse indicano numeri diversi: es. x e y non indicano lo stesso numero!
- Quando operi con le lettere devi chiederti per quali valori numerici l'operazione non perde di significato, questi valori vanno esclusi!

Calcola il valore delle seguenti espressioni algebriche, sostituendo i valori numerici corrispondenti.

a) $x + 2x - 3x =$ per $x_1 = \frac{2}{5}$; e $x_2 = -\frac{3}{4}$
b) $2m^2 - n^3 + 2n - 3m$; per $m = -1$ e $n = +2$
c) $3a\,(a - b) =$ per $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{3}{4}$
d) $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} - 2.\sqrt{a.b} =$ per $a = 4$; $b = 1$; e per $a = -4$; $b = 2$
e) Quali valori possono assumere le variabile nei seguenti casi?
   i. $a + 3 =$
   ii. $\sqrt{a} =$
   iii. $\sqrt[3]{x}$
   iv. $\frac{10}{y} =$

I MONOMI

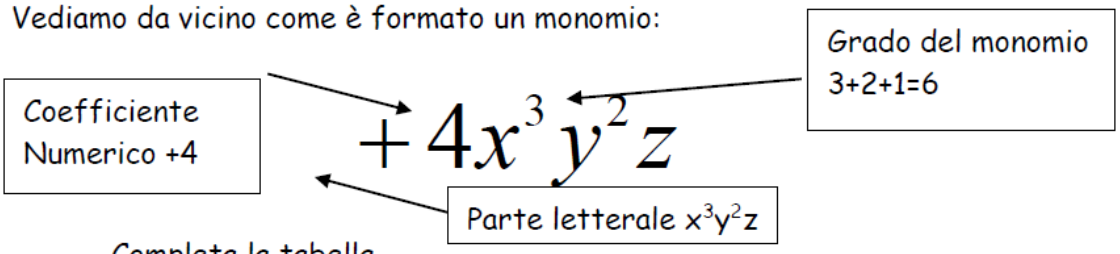
La più semplice espressione letterale è detta **monomio**. Il monomio è una espressione letterale in cui possono figurare una o più variabili (lettere) e solo le operazioni di moltiplicazione e divisione. Ovviamente un monomio rappresenta un numero.

Es. + 3a ; - 7x ; + $=-\frac{3}{2}ab^2$; $=\sqrt{2}x^3y^5z^8$; Non sono monomi: a +b ;1+a ;$(ab+c)^2$

Due o più monomi si dicono simili quando hanno la stessa parte letterale.

Es. + 3a è simile -13a, ma non simile a + $3a^2$; - $7x^2y$ è simile -3 x^2y, ma non simile x^2y^2;

Vediamo da vicino come è formato un monomio:



Completa la tabella

Monomio	Coefficiente numerico	Parte Letterale.	Monomi simili	Monomio opposto	Grado del monomio
$+\frac{3}{7}a^2b^4$					
	$-\frac{5}{4}$	x^2y^3			
			- 7 m^3		
				$-\frac{3}{5}a^{-3}b^{-1}$	
$7a^2b^{4n}c^{p+1}$					
$5a^mb^{2n}c^{-2p+1}$					
$\left(-\frac{5}{7}\right)^{-2}x^{-3}y^{-n}z^{2m+3}$					

1) Operazioni tra monomi (BM pag.85 es. 58 – 59):

a) Addizione e sottrazione.

Consideriamo monomi simili (cioè con uguale parte letterale) 2ab -6ab

Addizione:2 ab +6 ab =(2+6)ab = ……; 2 x^3y^4 +6xy =……;

Sottrazione: 2ab - 6ab =(2-6)ab = …… ; -2 x^3y^4 - $6x^3y^4$ =……;

$=\frac{4}{3}a^2b^3-\frac{7}{6}a^2b^3=$……; $\frac{3}{4}a^3b^3-\frac{5}{6}a^2b^3=$……;

Regola: ……

Esercizi:

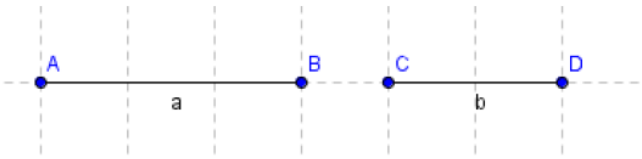
i) -3x + (-7a) – (- 2x) + (+5a) – (+8a) =

ii) $(-\frac{5}{2}ab^2)+(-\frac{3}{4}a^2b)-(+\frac{7}{3}ab^2)+\frac{13}{6}a^2b-(-\frac{4}{3}a^2b)=$

iii) $2x^m-5y^n+3x^m-6y^{2n}+6y^n=$

iv) $\frac{2}{5}a^nb^{m+1}-\frac{1}{2}a^{n-1}b^m-\frac{5}{2}a^nb^{m+1}+\frac{3}{5}a^{n-1}b^m=$

Significato geometrico dell'addizione e sottrazione di monomi.
Qual è il risultato della somma di a +b =



Conclusione: la somma geometrica di due o più monomi è .....
.....
ma non è più un .....
ma un **polinomio**.

b) Moltiplicazione

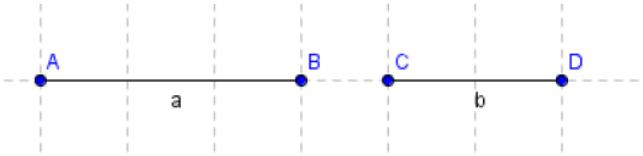
Esempio

3 a b . 4 b c = ... $3a^2b^3.(-2a^3b)$ = ...

$(+5a^{-5}b^3)\cdot(-3a^{-1}b^2c^3)=$ ..... $(-5a^nb^{m+1})(+4a^{2n}b^{3m-3})=$.....

Regola: .....

Significato geometrico della moltiplicazione di monomi.
Qual è il risultato del prodotto di a . b =



Conclusione: il prodotto geometrico di due segmenti è .....
.....

c) Divisione di monomi.

$(+6a^5b^3c):(-3ab^2c)=$

Casi particolari:

i) I coefficienti non sono divisibili $5a^3b^2:(-2ab)=$.....

ii) I coefficienti sono delle frazioni: $-\frac{1}{2}x^3y^2z^5:(\frac{3}{2}\ xyz^2)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3-1}y^{2-1}z^{5-2}=-\frac{1}{3}x^2yz^3$

Es: $\frac{12}{45}a^5b^3:\left(-\frac{36}{50}a^2b^5\right)=$;

iii) La parte letterale del divisore ha l'esponente maggiore di quella del dividendo:

(- 20 a^3b^2) : (- 4a^5b^6) = ... $(+6a^5b^3c):(-3ab^4c^3)=$.....

iv) Ricorda la divisione può essere scritta sotto forma di frazione, dunque

$5a^3b^2:(-2ab)=\frac{5a^3b^2}{-2ab}=-\frac{5a^2b}{2}$ semplificando la frazione.

Semplifica: $\frac{5a^3b^2}{-2ab}=$

v)Con gli esponenti letterali: $(+6a^{2n}b^{3m}c^5):(-3a^4b^mc^n)=$

vi) Con gli esponenti negativi: ricorda: 1:a =a^0 : a^1 = a^{0-1} = a^{-1} = $\frac{1}{a}$

(-12x^{-3}) : (+18x^{-5}) = $-\frac{12}{18}x^{-3-(-5)}=-\frac{2}{3}x^{-3+5}=-\frac{2}{3}x^2$

Che posso anche scrivere: $\frac{-12x^{-3}}{+18x^{-5}}=-\frac{2}{3x^{-2}}=-\frac{2}{3}x^2$

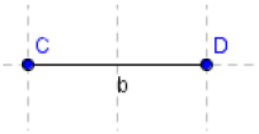
$(+6a^{2n}b^{3m}c^{-5}):(-3a^{-4n}b^mc^{-n})=$

d) Elevamento a potenza di monomi:

$(-6a^5b^3c)^2 =$ ..... $(-2x^3y^2z^5)^{-3} =$ ..... $(-6a^5b^nc^{-3})^m =$ .....

Significato geometrico dell'elevazione a potenza.

Qual è il risultato del prodotto di b^3=



e) Espressioni con monomi.

1) $a^{10}b^5$: ($-a^4b$)-a^5b^2.($-a^4b^3$): a^3b – 12a $^{13}b^{30}$:(- 6 a^7b^{26}) =
2) $-8a^3x$: (-2a) + 5a . (-2ax) + a^2x= [$-5a^2x$]
3) $-6a^4bc^3$: (- $2a^3bc$) + [$3ab^2c^3$. (- 2ab) + $4a^2b^3c^3$] : (- ab^3c) = [$5ac^2$]
4) $12x^3y^2 : (-4xy^2) - 2xy \cdot (-3xy^3) + (15x^2y) : (3y) - 6x^2y^4 =$

f) m.c.m. di monomi: serve per sommare due frazioni.

Esempio: $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} =$ calcolo m.c.m. (4;6) = 12 ; ottengo : $\frac{9-10}{12} = -\frac{1}{10}$

Con le lettere capita la stessa cosa $\frac{3}{a} - \frac{5}{b} =$; calcolo mcm (a;b) = ...

Ottengo:

Calcola l'm.c.m. dei seguenti monomi -polinomi.

a - 2a ; a^2 - 2a ; $8x^2y^3 - 12x^3y^5$; $6m^4n^3 - 10m^5n^7 - 15m^3n^6$; a – (a+2) ; (2 + a) - (a + 1)

Somma le seguenti frazioni algebriche:

i) $\frac{3}{a} - \frac{5}{2a} =$ ii) $\frac{3}{a^3} - \frac{5}{2a} =$ iii) $\frac{3b}{a^3} - \frac{5b}{2a} =$

iv) $\frac{3+b}{a^3} - \frac{5-b}{2a} =$ v) $\frac{3}{a} - \frac{5}{2+a} =$ vi) $\frac{3}{a+1} - \frac{5}{2+a} =$

g) MCD di monomi: serve per la messa in evidenza, l'inverso della applicazione della proprietà distributiva.

Esempio: 2x + 6y = 2(x + 3y) ; 2 é il MCD tra 2 e 6 .

Calcola l'M.C.D. dei seguenti monomi -polinomi.

a - 2a ; a^2 - 2a ; $8x^2y^3 - 12x^3y^5$; $6m^4n^3 - 10m^5n^7 - 15m^3n^6$; $4a - 8a^2$; $12\pi - 15\pi$

Scomponi in fattori, mettendo in evidenza il fattore comune.

i) $a^4 + a^3$ = ii) $12b^7 + 16b^9$= iii) $12\pi^5 - 15\pi^6$= iv) $\frac{3}{4}y^5 - \frac{5}{4}y^7 =$

La scomposizione in fattori serve anche a semplificare delle frazioni algebriche

Esempio:

$\frac{a^4+a^3}{a^6} = \frac{a^3 \cdot (a+1)}{a^6} = \frac{a+1}{a^3}$

Semplifica le seguenti frazioni dopo avere scomposto in fattori.

i) $\frac{x^2+3x}{7x+21} =$ ii) $\frac{5ab}{15a^2+15ab} =$ iii) $\frac{-5x+10}{x-2} =$ iv) $\frac{4a-4}{2-2a^2} =$

v) $\frac{3x}{3x+9} =$ vi) $\frac{a}{a+1} =$ vii) $\frac{(x+1)}{(x+1)^2} =$ viii) $\frac{-2x^2-2x}{5x+5} =$

h) La proprietà distributiva.

Ricorda: 98 . 7 = (90 +8) .7 = 90 . 7 + 8 .7 = 630 + 56 = 686 ; oppure

98 . 7 = (100 - 2) .7 = 100 .7 – 2 .7 = 700 – 14 = 686

Con le lettere capita la stessa cosa, ma bisogna far attenzione ai segni!

(2a +3) . 4 = 2a . 4 + 3 . 4 = 8a + 12 oppure,

-5 . (3x – 2) = -5 . 3x + 5 . 2 = -15x + 10

Calcola:

- $(x + 2) \cdot x - (x^2 + 3x - 4) =$ [4 – x]
- $2x \cdot (x - 3) - 2(x^2 - 3x - 3) =$ [6]
- $(3m + 6x) - (m^2 + 3x) - (3x + 2m) =$ [$m - m^2$]
- $2a \cdot (2a - 3) - 9 - 4 \cdot (a^2 - 2) + 6a =$ [-1]
- $(a - 2) + (3a - 1) - (-1 + 5a) =$ [-a – 2]
- $2a^2 - a \cdot (a - 2) - 2 \cdot (a - b) + 2b =$ [$a^2 + 4b$]

Con i radicali capita la stessa cosa:

- $2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{6}) - 3 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{6}) + 2\sqrt{3} =$ $[\sqrt{3} + \sqrt{6}]$
- $2\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} - 3\sqrt{3}) =$ $[5\sqrt{6} - 2]$
- $2\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2} \cdot (\sqrt{8} - 3\sqrt{3}) =$ $[11\sqrt{6} + 2]$

i) La "doppia" proprietà distributiva.

27 . 34 = (20 +7) . (30 + 4)= 20 .30 +20 .4 + 7.30 + 7.4 = 600 +80 +210 +28 = 918

Oppure: (30 -3) . (30 +4) = 30 .30 + 30 .4 – 3.30 – 3.4 = 900 +120 -90 -12 = 918

Con le lettere capita la stessa cosa:

(x + 7) . (y +4) = xy +4x +7y + 28 non ho monomi simili, dunque il risultato rimane invariato.

Calcola:

(x + 7) . (x + 4) = (x - 7) . (x + 4) = (x - 7) . (x - 4) = (x - 7) . (x + 7) =

(x - 7) . (x - 7) = (a - b) . (a + b) = (a - b) . (a - b) = (a + b) . (a + b) =

Con i numeri razionali si procede allo stesso modo, applicando la proprietà distributiva.

$\left(\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) =$ $\left(\frac{5}{2}y - \frac{2}{5}x\right) \cdot (y + 2) =$ $\left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{7}{3}b\right) \cdot \left(\frac{4}{9}a - 3b\right)$

$\left(\frac{1}{2}x + 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) =$ $\left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{4}\right) =$ $\left(\frac{5}{2}y - \frac{2}{5}x\right)^2 =$

Con i numeri irrazionali e radicali si procede allo stesso modo, applicando la proprietà distributiva.

$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 2) =$

$(\sqrt{6} - \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{8}) =$

$(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) \cdot (3\sqrt{6} - 2\sqrt{8}) =$

$(\pi + 1) \cdot (\pi - 2) =$

$(\pi + 1) \cdot (\pi - 1) =$

$(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{8} - \sqrt{6}) =$

$(\sqrt{6} + \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{8}) =$

$(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) =$

$\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\pi - \frac{2}{5}\right) =$

$(\pi + 1)^2 =$

Esercizi

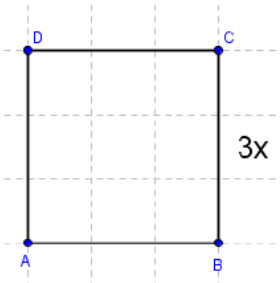
1) Trasforma le seguenti frasi in espressioni algebriche.
   a) Il successivo di un numero.
   b) Il precedente di un numero.
   c) Il quadruplo di a aumentato di 4
   d) 8 diminuito della metà di y
   e) La differenza tra 6 e il quadrato di b moltiplicata per 4
   f) Il triplo di a aumentato di 9 viene diviso per il quadrato di y sottratto a x
   g) Si sottragga al doppio di b il cubo di x e si moltiplichi poi per il reciproco di -3/2
   h) Si moltiplichi la differenza tra 20 e il doppio di x per 8.

2) Completa la seguente tabella:

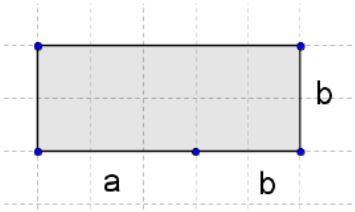
Monomio	Coefficiente Numerico.	Parte letterale	Monomio simili	Grado del monomio
$-4a^3$	-4	a^3	$5/2\ a^3$	
$3ab^2$				
	$-\frac{1}{2}$	x^2y^3		
			$\frac{3}{4}\ m^4n^5t^6$	
$-b^5c^7$				
Inventa..				

3) Esprimi mediante un espressione letterale il perimetro, l'area delle seguenti figure.

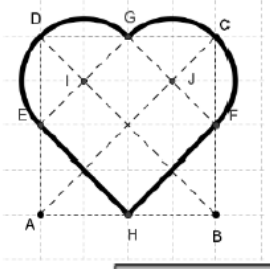
a)



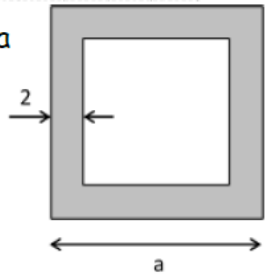
b)



c) Lato quadrato l = a



4) La figura rappresenta una cornice quadrata. Il lato esterno misura **a** cm e la larghezza della cornice è di **2** cm.
   a) Calcola l'area della cornice.
   b) Determina **a** sapendo che l'area della cornice vale 80 cm^2.



5) Determina, usando le lettere a e b, il perimetro e l'area (in due modi diversi) dell'esagono concavo.

