Insiemi e probabilità. Un po' di storia.

TRA STORIA E REALTÀ

Il calcolo delle probabilità si è sviluppato partendo dallo studio dei giochi d'azzardo (carte, dadi, roulette).
Già Cicerone, nel suo libro *De divinatione*, cioè "**L'arte del prevedere**", cerca di dare una spiegazione più rigorosa ai termini "sorte" e "**caso**". Bisogna però aspettare il XVI secolo per assistere a un vero e proprio studio del calcolo della probabilità.

La conoscenza della **teoria delle probabilità** permette di capire quanto sia sconveniente dissipare soldi nei giochi d'azzardo. Per esempio, la risposta alla domanda: "È più probabile essere colpiti da un fulmine o fare 6 al SuperEnalotto?" può essere sorprendente perché la probabilità di essere colpiti da un fulmine è dello 0,000017%, mentre la probabilità di fare 6 è dello 0,00000016%.



Achille e Aiace raffigurati in un'anfora del VI sec. a.C. mentre giocano a dadi.

Se la probabilità è nata come studio del gioco d'azzardo, già nel XVIII secolo **de Moivre** (matematico francese) studiò i problemi della probabilità nelle assicurazioni. Successivamente il matematico francese Antoine Augustin **Cournot** (1801-1877) studiò l'applicabilità della teoria della probabilità ai fenomeni di massa utilizzando la **legge dei grandi numeri** che era stata formulata dal matematico del Seicento **Bernoulli**.



Abraham de Moivre (1667-1754).

La probabilità, oggi, trova applicazione in tutti i campi della scienza. In biologia, per esempio, ricorderai le **leggi di Mendel** e la trasmissione dei caratteri ereditari.
In fisica la probabilità viene utilizzata per lo studio della struttura dell'atomo, mentre nel commercio viene utilizzata per prevedere le scorte di magazzino o la vendita di un particolare prodotto.
Anche in meteorologia la probabilità ha il suo utilizzo, in quanto permette di prevedere l'andamento del tempo e il clima in generale.



Gregor Mendel

Dalla prima media...

1) In una classe di 24 allievi, 15 sanno pattinare e 20 sanno sciare.
Determina quanti allievi:

a) Sanno pattinare **e** sciare?

.....

b) Sanno **solo** sciare?

.....

c) Sanno **solo** pattinare?

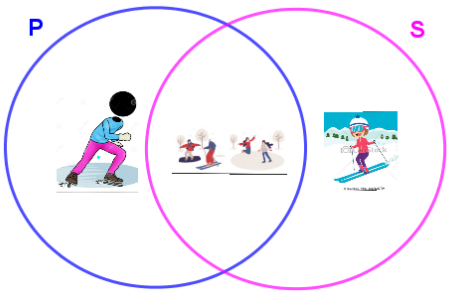
.....

d) Sanno pattinare **o** sciare?

.....

Rappresentando con un diagramma d'Eulero – Venn, abbiamo:

Prendo in considerazione tutta la classe qual è la probabilità che scegliendo a caso un allievo sappia..... Per risolvere l'esercizio dobbiamo prendere in considerazione:



L'insieme di tutti casi possibile, che viene contrassegnato con Ω (Omega maiuscolo)

Possiamo considerare l'insieme di tutti gli allievi $\Omega =$ {x|x allievo dell classe}

e gli insiemi $P =$ {x|x allievo dell classe che sappia pattinare} ;

$S =$ {x|x allievo dell classe che sappia sciare}

Il numero totale degli allievi della classe sarà: .....

$C = (P \cup S) \setminus (P \cap S) =$ .....

Possiamo ora determinare la probabilità che un allievo scelto a caso sappia.

a) Pattinare? .....

b) Sciare? .....

c) Pattinare e sciare? .....

d) Pattinare o sciare? .....

e) Solo sciare? .....

f) Solo pattinare? .....

2) Durante l'ora d'educazione fisica vengono proposte tre attività: il calcio, la pallacanestro e la danza.

- 7 allievi giocano a calcio **e** a pallacanestro.
- 6 allievi fanno danza **e** pallacanestro.
- 5 allievi giocano a calcio **e** fanno danza.
- 4 allievi partecipano alle tre attività.

Sapendo che gli alunni che giocano a calcio sono 25; 17 allievi fanno danza e che 12 allievi giocano **solo** a pallacanestro, determina:

a) Qual è la probabilità d'incontrare un alunno che pratichi **solo** danza?

b) Qual è la probabilità d'incontrare un alunno che pratichi danza?

c) Qual è la probabilità d'incontrare un alunno che pratichi **solo** a calcio?

d) Qual è la probabilità d'incontrare un alunno che giochi a calcio?

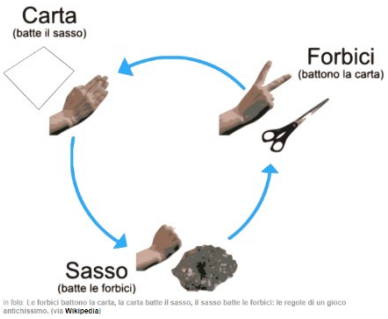
e) Qual è la probabilità d'incontrare un alunno che pratichi la pallacanestro?

f) Qual è la probabilità d'incontrare un alunno che pratichi **solo** la pallacanestro?

Rappresenta la situazione con un diagramma di Venn.

3) Il gioco della morra.





Nel gioco della "morra cinese" i due giocatori devono mostrare contemporaneamente uno dei seguenti simboli con la mano: Forbice, Carta e Sasso.

Le diverse combinazioni che si possono formare sono mostrate nella seguente tabella, che completi.

	C	S	F
C			
S			
F			

Le regole del gioco sono le seguenti: Ogni segno ne batte un altro, secondo questo schema: 1. Il sasso spezza le forbici (vince il sasso) 2. Le forbici tagliano la carta (vincono le forbici) 3. La carta avvolge il sasso (vince la carta)

a) Cerchia sulla tabella le combinazioni in cui vincono le forbici.

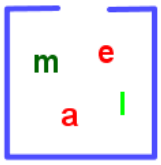
b) Quante sono le combinazioni vincenti?

c) Considera l'insieme di tutte le combinazioni: le coppie formate da "carta" e "sasso", che parte rappresentano?

d) Con quale simbolo hai la maggior probabilità di vittoria?

e) Cristina sostiene che la probabilità che escano due simboli uguali è minore della probabilità che escano due simboli diversi. Sei d'accordo con Cristina?

4) In un'urna ho le lettere che compongono la parola mela; estraendone una alla volta qual è la probabilità che riesca a comporre la parola mela?



a) Risoluzione con le permutazioni.

.....

.....

b) Risoluzione con il diagramma ad albero (della probabilità)

.....

.....

.....

.....

5) Lanciando un dado qual è la probabilità che esca un tre o un numero pari. **[2/3]**

6) Lanciando un dado qual è la probabilità che esca un numero maggiore di due o un numero dispari? **[5/6]**

7) È più probabile che esca testa lanciando una moneta oppure che esca il 5 lanciando un dado? Motiva la risposta.

8) Il lucchetto a tre cifre.



Il meccanismo con tre rotelline (quindi 3 cifre) consente l'impostazione di centinaia di combinazioni per una maggiore vostra sicurezza.

c) Quante sono le combinazioni possibili?

d) Qual è la probabilità d'indovinare quella esatta?

9) Interrogazione. In una classe vi sono 12 ragazzi e 10 ragazze qual è la probabilità che ..

a) Venga interrogato un ragazzo? $\left[\mathrm{P(M)} = \frac{12}{22} \cong 54{,}5\%\right]$

b) Venga interrogata una ragazza? $\left[\mathrm{P(F)} = \frac{10}{22} \cong 45{,}5\%\right]$

c) Venga interrogato un ragazzo, dopo che sia stata interrogata una ragazza? $\left[\mathrm{P}(M|F) = \frac{20}{77} \cong 26{,}0\ \%\right]$

d) Venga interrogato un ragazzo, dopo che sia già stato interrogato un ragazzo? $\left[\mathrm{P}(M|M) = \frac{2}{7} \cong 28{,}6\ \%\right]$

e) Venga interrogato una ragazza, dopo che sia già stata interrogata una ragazza? $\left[\mathrm{P}(F|F) = \frac{15}{77} \cong 19{,}5\ \%\right]$

f) Vengano interrogati due ragazzi, dopo che sia già stata interrogata una ragazza? $\left[\mathrm{P(M|M|F)} = \frac{1}{7} \cong 14{,}3\%\right]$

10) L'armadietto della scuola.

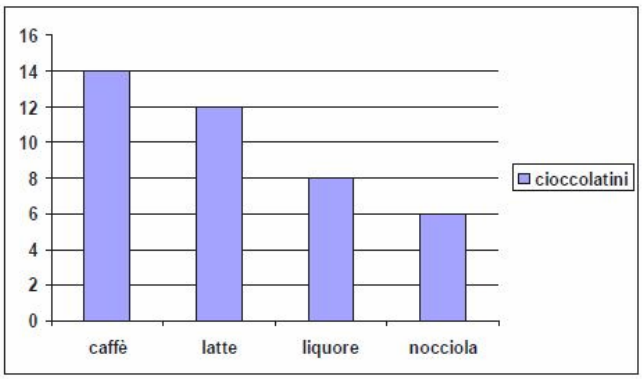


L'armadietto della scuola ha un meccanismo con quattro rotelline (quindi 4 cifre) e consente l'impostazione di centinaia di combinazioni per una maggiore vostra sicurezza.

a) Quante sono le combinazioni possibili?

b) Qual è la probabilità d'indovinare quella esatta?

11) Il grafico mostra il numero dei cioccolatini di diversi gusti contenuti in una scatola, caffè, latte, liquore e nocciola



Prendendo un cioccolatino a caso, qual è la probabilità di:

a) scegliere un cioccolatino alla nocciola?

b) Non scegliere un cioccolatino alla nocciola.

c) Scegliere un cioccolatino al caffè **oppure** al liquore?

d) Scegliere un cioccolatino al caffè **e** al liquore?

e) Scegliere due cioccolatini prima uno al latte ed il secondo al caffè?

f) Scegliere tre cioccolatini prima uno al latte, il secondo al caffè e il terzo al liquore?

12) In un sacchetto ci sono palline rosse, bianche e blu. La probabilità di estrarre una pallina rossa è 1/3 e quella di estrarre una pallina blu è 1/5. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

13) Calcolare la probabilità che lanciando due dadi esca un numero dispari o un numero primo. **[19/36]**

14) Lanciando 3 volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere almeno una testa (T)?

15) Lanciando un dado, qual è la probabilità che esca un sei o un numero dispari? **[2/3]**

16) Estraendo una carta da un mazzo di 40, qual è la probabilità che sia un re o una carta di fiori? **[13/40]**

17) Si estrae una carta da un mazzo di 40. Qual è la probabilità che sia una figura e che sia di cuori? Attenzione i due eventi ***non sono*** dipendenti! **[3/40]**

18) Si estrae una carta da un mazzo di 40 e, senza reinserirla nel mazzo, se ne estrae una seconda. Qual è la probabilità che siano due regine? Attenzione i due eventi ***sono*** dipendenti! **[1/130]**

19) Aldo ha messo in un sacchetto tre foglietti di carta. Sul primo ha scritto la lettera **E**, sul secondo la lettera **R** e sul terzo la lettera **T**. Dopo aver mischiato i foglietti esegue tre estrazioni a caso senza rimettere i foglietti estratti nel sacchetto; determina qual è la probabilità di:

a) che escano nell'ordine le lettere **T**, **R**, **E** in modo da formare la parola "TRE"?

b) E se si reinserissero le lettere?

20) Una classe è formata da 22 alunni, 14 maschi e 8 femmine.

a) Si deve mandare un delegato a una riunione studentesca. Se si estrae a sorte qual è la probabilità che sia femmina?

b) Dalla stessa classe si scelgono a caso due studenti, un maschio e una femmina, per partecipare a un'indagine statistica. Paolo vorrebbe partecipare: quale probabilità ha di essere scelto?

21) La seguente tabella mostra il numero di iscritti a un club sportivo.

	<di 18 y	>di 18 y	Tot.
Maschi	20	15	
Femmine	18	22	
Totale			

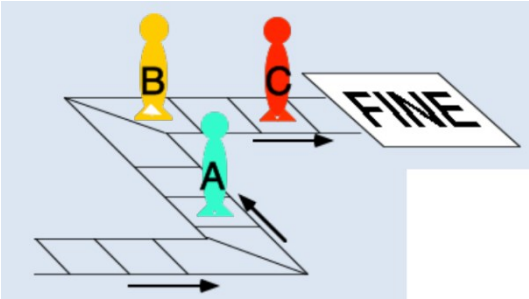
a) Se viene scelta a caso una delle persone iscritte al club, qual è la probabilità che sia un maschio?

b) Qual è la probabilità che la persona scelta a caso abbia più di 18 anni?

c) Qual è la probabilità che la persona scelta a caso sia un maschio con meno di 18 anni?

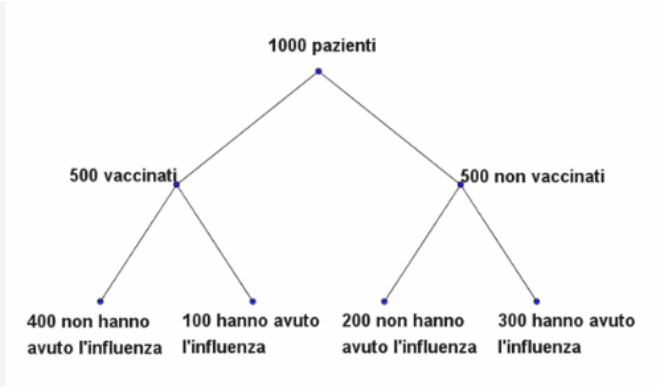
d) Qual è la probabilità che la persona scelta a caso sia una femmina con più di 18 anni?

22) Gioco dell'oca – un finale carico di tensione.



Al gioco dell'oca si lanciano sempre due dadi e ci si sposta di tante caselle quant'è la somma dei punti ottenuti; vince chi arriva prima alla casella fine. Sapendo che inizia a giocare C, ed inseguito B e da ultimo A; chi ha la maggior probabilità di vittoria? Cambiando la successione dei giocatori, cosa capita con la probabilità di vittoria? È sempre lo stesso giocatore che possiede la maggior probabilità di vittoria?

23) Osserva il seguente diagramma ad albero. Dei 1000 pazienti di un medico solo 500 sono stati vaccinati contro l'influenza. Dopo alcuni mesi, si è riscontrato che l'80% dei vaccinati non ha avuto l'influenza mentre il 40% dei non vaccinati non ha avuto l'influenza.



a) Utilizzando i dati del diagramma ad albero completa la seguente tabella.

	Senza Influenza	Con Influenza	Totale
Vaccinati	400		
Non vaccinati			
Totale		400	1000

b) Qual è la probabilità che una persona scelta a caso dal campione di pazienti abbia avuto l'influenza?

i) 80% B. **ii)** 60% **iii)** 50% **iv)** 40%

c) Qual è la probabilità che un paziente, preso a caso tra coloro che sono stati vaccinati, abbia avuto l'influenza?

24) In una classe vi sono 16 studenti, di cui 12 maschi; qual è la probabilità che scegliendone tre a caso da interrogare, siano maschi?

$$\left[\frac{11}{28} \cong 39,3\%\right]$$

25) Scegliendo un punto a caso hai maggiore possibilità che sia all'interno alla circonferenza inscritta nella **fig. 1** o all'interno del quadrato nella fig. 2?

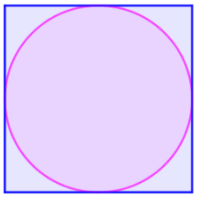


Fig. 1

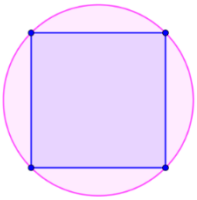


Fig. 2

26) Cosa capita con i solidi? Scegliendo un punto a caso hai maggiore possibilità che sia all'interno alla sfera inscritta nella **fig. 1** o all'interno del cubo nella fig. 2?

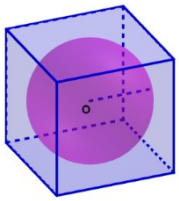


Fig. 1

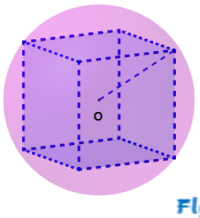


Fig. 2

27) I test a scelta multipla.

a) Un test a scelta multipla è composto da una domanda e quattro possibili risposte, di cui solo una è corretta; qual è la probabilità di rispondere esattamente alla domanda?

b) Un test a scelta multipla è composto da due domande e quattro possibili risposte per ogni domanda, di cui solo una è corretta; qual è la probabilità di rispondere esattamente alla seconda domanda, presupposto d'aver risposto correttamente alla prima?

c) Un test a scelta multipla è composto da 10 domande e quattro possibili risposte per ogni domanda, di cui solo una è corretta; qual è la probabilità di rispondere esattamente a tutte le domande?

28) Consideriamo un'urna di 10 palline verdi, 20 blu e 30 rosse; calcola la probabilità che, pescando 2 palline in sequenza e senza rimettere la prima nell'urna, vengano estratte:

a) Due palline di colori diversi. $\left[\frac{110}{177} \cong 62{,}2\%;\ \ldots.\ 😉\right]$

b) Due paline dello stesso colore.

29) Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte; calcola la probabilità che la carta sia:

a) Un re o un sette. **b)** Un re o una figura di cuori.

c) Un asso o una carta di picche o una figura. $\left[\frac{2}{13};\ \frac{3}{26};\ \frac{25}{52}\right]$

Esercizi svolti (unibo.it) bello

Sitografia.

Il Calcolo delle probabilità e la Teoria dei Giochi.

Carta-forbice-sasso': la morra cinese aiuta a capire il funzionamento degli ecosistemi e il ciclo dei prezzi.

Le origini del calcolo delle probabilità