# I sistemi d'equazioni. BM4 pag.24 - 27. Esercizi 56-67 pag.95 -97.

## i) Equazioni ad un'incognita

Es. Trova un numero che sommato al suo triplo dia 28.

Scrivendolo nel linguaggio matematico avremo:

$x + 3x = 28$ , da cui segue = > $4x = 28$ , $x = 7$

Dall'equazione ottengo dunque una soluzione. Es. det $S = \{7\}$

## ii) Equazione a due incognite.

Determina due numeri che sottratti diano 4. $(-3)+7 = +4$ $(-3)-(-7) =$

Matematicamente avremo: $x - y = 4$

Quali sono le possibili soluzioni? $\{(5;1);(-3;-7);(0;-4)\ldots$

Per poter definire un'unica soluzione dobbiamo porre un'altra condizione, per esempio che la loro somma sia 10 Segue che => $x + y = 10$

Otteniamo di conseguenza due equazioni che formano **un sistema d'equazioni** e scriveremo:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Per risolvere un sistema abbiamo diversi metodi tra i quali i seguenti.

### a) Metodo di sostituzione.

Risolvo un'equazione, che sostituisco nell' ( la) altra ( e ) ottenendo di conseguenza una sola equazione ad una sola incognita. Nel nostro caso.

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4 = y \\ x + x - 4 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 4 \\ 2x - 4 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ 2x = 14 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 4 \\ x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 7 - 4 = 3 \\ x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{Sist. det. } S = \{(7;3)\}$$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ y + 4 + y = 10 \end{cases} => \begin{cases} x = y + 4 \\ 2y = 10 - 4 \end{cases} => \begin{cases} x = y + 4 \\ 2y = 6 \end{cases} => \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 + 4 \end{cases} => \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$$ segue che il sistema è determinato e con insieme soluzione : $S = \{(7;3)\}$

### b) Metodo di confronto.

Risolvo le due equazioni rispetto alla stessa incognita e le uguaglio (confronto) .

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 10 - x \end{cases} => \; x - 4 = 10 - x \; ; 2x = 14 \; ; x = \ldots 7 \ldots ; => \; y = 3$$

Il sistema è chiaramente determinato con S = det. $S = \{(7;3)\}$

$$\begin{cases} x = y + 4 \\ x = 10 - y \end{cases} \quad y + 4 = 10 - y \; ; 2y = 6 \; ; y = 3$$

$x = 3 + 4 = 7$ Sist. det. $S = \{(7;3)\}$

**c) Metodo d'addizione – sottrazione.**

Quando uno dei coefficienti delle due equazioni sono uguali posso sottrarli.

$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 10 \end{cases}$ Sommando la prima equazione con la seconda ottengo:

$2x + 0y = 14 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow y = 10 - 7 = 3$

Il sistema è dunque ... determinato ... $S = \{(7;3)\}$ .....

**Osservazione**: Un sistema a più equazioni viene risolto normalmente con il metodo di sostituzione, riducendo le incognite.

Esercizi.

i) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Metodo di Sostituzione

$\begin{cases} y = 4 - x \\ 2x - (4 - x) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x \\ 2x - 4 + x = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x \\ 2x + x = 4 + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x \\ 3x = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Sist. det. $S = \{(2;2)\}$

Metodo di confronto

$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 4 - x \end{cases}$

$2x - 2 = 4 - x$

$x = 2$

$y = 4 - \overset{(x)}{2} = 2$

SIST. DET. $S = \{(2;2)\}$

Metodo Addizione - Riduzione

$\begin{cases} 1) \; 2x - y = 2 \\ 2) \; x + y = 4 \end{cases}$

$1° + 2° \rightarrow 3x + 0y = 6$

$3x = 6$

$x = 2$

$y = 4 - 2$

$y = 2$

Sist det $S = \{(2;2)\}$

ii) $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases}$

## Metodo di sostituzione

$\begin{cases} 2x = 3 - 6y \\ 2(3-6y) + 9y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = 3 - 6y \\ 6 - 12y + 9y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = 3 - 6y \\ 6 - 3y = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x = 3 - 6y \\ -3y = 5 - 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3-6y}{2} \\ -3y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3-6y}{2} \\ 3y = 1 \end{cases}$

$5 = 4 + 1$

$2 \cdot 5 = 2 \cdot (4+1)$

$\begin{cases} x = \frac{3-6y}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3-2}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Sist. det. $S = \{(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})\}$

## CONFRONTO

$\begin{cases} 6y = 3 - 2x \\ 9y = 5 - 4x \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{3-2x}{6} \\ y = \frac{5-4x}{9} \end{cases}$

$\frac{3-2x}{6} = \frac{5-4x}{9}$ $\quad \frac{9-2x}{18} = \frac{10-8x}{18}$

$9 - 6x = 10 - 8x$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{6}$

$y = \frac{3-1}{6}$ $\quad y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

SIST. DET. $S = \{(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})\}$

## Metodo Poltrón

2. $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases}$

I) $4x + 12y = 6$

II) $4x + 9y = 5$

I − II $\quad 0x + 3y = 1$

$y = \frac{1}{3}$

$2x + 6 \cdot \frac{1}{3} = 3$

$2x = 3 - 2$

$x = \frac{1}{2}$

Sist. det. $S = \{(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})\}$

3 · $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases}$

2 · $\begin{cases} 6x+18y=9 \\ 8x+18y=10 \end{cases}$

II − I $2x+0y=1$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}$

$2\cdot\frac{1}{2}+6y=3$

$1+6y=3$

$6y=2$

$y=\frac{2}{6}$

$y=\frac{1}{3}$

sis. determinato

$S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)\right\}$

4 · $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ -5x - y = 9 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ -20x-4y=36 \end{cases}$

I + II

$-17x=46$

$x=-\frac{46}{17}$

ii) iv) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4-y-z \\ 2(4-y-z)-y+z=8 \\ 3(4-y-z)+2y-z=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=4-y-z \\ 8-2y-2z-y+z=8 \\ 12-3y-3z+2y-z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-y-z \\ +3y+z=0 \\ -y-4z=-11 \end{cases}$

$\begin{cases} x=4-y-z \\ z=-3y \\ -y-4(-3y)=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-y-z \\ z=-3y \\ -y+12y=-11 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4-y-z \\ z=-3y \\ 11y=-11 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4-(-1)-z \\ z = -3\cdot(-1) \\ y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4+1-3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$

Sist. det. $S = \{(2; -1; 3)\}$

v) $\begin{cases} x+y=z \\ x+z=t \\ x+t=y+z \\ x+y=-3 \end{cases}$ S= ( -1;-2;-3;-4)

$\begin{cases} x = z-y \\ z-y+z=t \\ z-y+t=y+z \\ z-y+y=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = z-y \\ 2z-y=t \\ z-y+t=y+z \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = z-y \\ 2\cdot(-3)-y=t \\ t=2y \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = z-y \\ -6-y=t \\ t=2y \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = z-y \\ t=-6-y \\ -6-y=2y \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3-y \\ t=-6-y \\ -6=3y \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3-y \\ t=-6-y \\ y=-2 \\ z=-3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -3+2 \\ y=-2 \\ z=-3 \\ t=-6+2 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=-3 \\ t=-4 \end{cases}$

S.t. det. $S = \{(-1; -2; -3; -4)\}$

## Esercizi sistemi d'equazioni. Vedi schede.

### 1) Risolvi con il metodo che meglio credi i seguenti sistemi.

i) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = -3 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 2 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ 3y - 3x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

### 2) Risolvi i seguenti problemi.

**a)** Trova due numeri sapendo che la loro somma dà 26, mentre la loro differenza è 2.

**b)** Determina l'età di due persone sapendo che la somma della seconda età con il doppio della prima dà 70, mentre la differenza tra il sestuplo della prima età e il doppio della seconda dà 10. $S = \{(15; 40)\}$

**c)** In un cortile vi sono delle galline e dei conigli. Calcolare quanti conigli e quante galline si trovano in quel cortile, sapendo che si contano 40 teste e 112 zampe.

$S = \{(24\,g; 16\ c)\}$

$x$ = le galline

$y$ = conigli

2 $\begin{cases} x + y = 40 \\ 2x + 4y = 112 \end{cases}$

I $\begin{cases} 2x + 2y = 80 \\ 2x + 4y = 112 \end{cases}$

II $-$ I $\quad 0x + 2y = 32$

$y = 16$

$x = 24$

**d)** Per acquistare due libri ho speso 60 CHF. Il costo di uno dei due libri è i 2/3 del costo dell'altro. Determina il costo dei due libri. $S = \{(24,36)\}$

**e)** Gigi ha nel salvadanaio 460 CHF in monete da 5 CHF e da 1 CHF. Sapendo che le monete da 5 CHF sono 20 in più delle altre, calcolare il numero delle monete d'ogni tipo. $S = \{(60,80)\}$

**3) Risolvi i seguenti sistemi riducendoli prima alla forma più semplice.**

i) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 3 \\ -\frac{9}{4} = 2y + \frac{1}{4}x \end{cases}$ $S = \{(-5;\ -2)\}$

ii) $\begin{cases} \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{2} = -\frac{3}{4} \\ \frac{y-1}{3} - \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}x \end{cases}$ $S = \{(-3\ ;-2)\}$

iii) $\begin{cases} x - 2 - \frac{3y+16}{5} = 0 \\ \frac{x-1}{3} = 3 - \frac{y+6}{2} \end{cases}$ $S = \{(4;-2)\}$

iv) $\begin{cases} x - 3 = -\frac{5}{3}y \\ \frac{10}{3}y = 6 - 2x \end{cases}$ $S =????$

**4) Creatività.**

i) Prova ad inventare un sistema a due incognite e due equazioni. Chiaramente cercherai di risolverlo.

ii) Inventa un problema che sia risolvibile con un sistema a due incognite.

**5) Risoluzione di un sistema a tre incognite e tre equazioni.**

**i)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ x - y + 2z = -5 \end{cases}$ [1;2;-2]

**ii)** $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$ [8;-7,-14]

**iii)** $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 \\ x - y + z = \frac{5}{6} \\ x + y = \frac{5}{6} \end{cases}$ $\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right]$

**6) Risolvi con un sistema i seguenti problemi.**

**i)** Determina tre numeri sapendo che la loro somma è 60, che il secondo è i $\frac{2}{3}$ del primo e che la somma di $\frac{1}{5}$ del primo e dei $\frac{3}{2}$ del terzo è 21. **[30;20;10]**

$x$ = nr. 1° $y$ = nr. 2° $z$ = nr. 3°

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ y=\frac{2}{3}\cdot x \\ \frac{1}{5}x+\frac{3}{2}z=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\frac{2}{3}x+z=60 \\ y=\frac{2}{3}x \\ \frac{1}{5}x+\frac{3}{2}z=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{3}x+z=60 \\ y=\frac{2}{3}x \\ \frac{1}{5}x+\frac{3}{2}z=21 \end{cases}$$

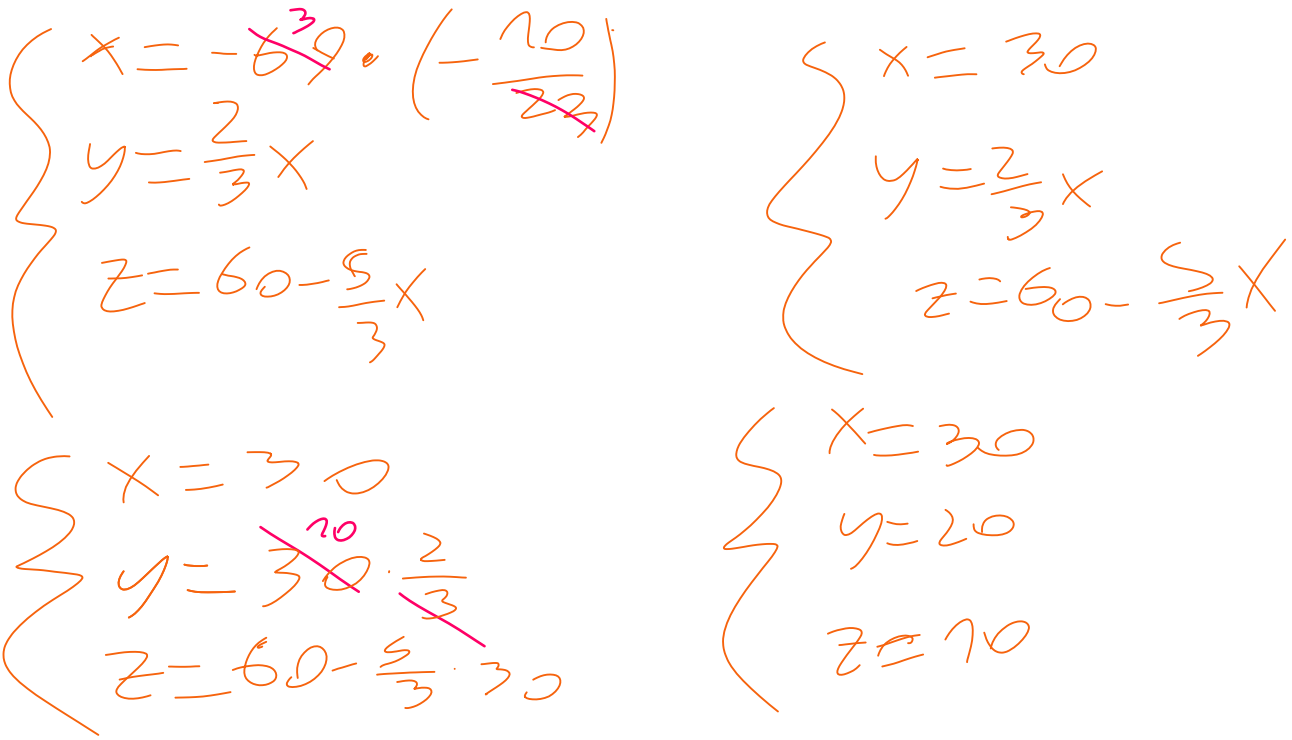
$$\begin{cases} z=60-\frac{5}{3}x \\ y=\frac{2}{3}x \\ \frac{1}{5}x+\frac{3}{2}\left(60-\frac{5}{3}x\right)=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x+90-\frac{5}{2}x=21 \\ y=\frac{2}{3}x \\ z=60-\frac{5}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x=21-90 \\ y=\frac{2}{3}x \\ z=60-\frac{5}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2-25}{10}x=-69 \\ y=\frac{2}{3}x \\ z=60-\frac{5}{3}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{23}{10}x=-69 \\ y=\frac{2}{3}x \\ z=60-\frac{5}{3}x \end{cases}$$



**ii)** In un numero di tre cifre la cifra delle unità è doppia di quella delle decine e la somma delle tre cifre è 11. Scambiando l'ordine delle cifre delle centinaia e delle decine si ottiene un nuovo numero che supera il precedente di 90. Trova il numero. **[236]**

**iii)** L'età di un padre supera di 6 anni il triplo dell'età del figlio; tra 15 anni l'età del padre sarà il doppio dell'età del figlio. Calcolare l'età attuale del padre e del figlio. **[33;9]**

**iv)** Ieri Giovanna si è pesata con lo zainetto in spalla: la bilancia segnava 45 kg. Oggi pesa 53 kg, ma il suo zainetto è tre volte più pesante di quello del giorno prima. Quanti kilogrammi pesa Giovanna, considerando che la sua massa tra ieri e oggi è rimasta invariata?

**v)** In uno scaffale di un supermercato vi sono 54 scatole, alcune di fagioli, altre di piselli, altre ancora di lenticchie. Si sa che le scatole di lenticchie sono due più di quelle dei fagioli e che se si somma il numero delle scatole di fagioli con la metà di quello delle scatole di piselli e con un terzo di quello delle scatole di lenticchie si ottiene 32. Quante scatole di fagioli, di piselli e di lenticchie vi sono?

**[16;20;18]**

## 7) Due sistemi a quattro incognite e quattro equazioni.

i) $\begin{cases} x-y+z+t=-2 \\ x+y-z-t=8 \\ -x+y-z+t=-2 \\ -x+y+z+t=-4 \end{cases}$ [3; 2; -1; -2]

ii) $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=3 \\ z-t=1 \\ t+x=1 \end{cases}$ **[3;2; –1; –2]**

iii) Determina l'età di quattro fratelli sapendo che sommando in tutti i possibili modi le età di tre di essi ottengo di volta in volta 37, 38, 43 e 47 anni.
[8; 12; 17; 18]

## 8) Risoluzione grafica di un sistema.

i) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$ ( 5; 2 ) ii) $\begin{cases} x+y=5 \\ -x-y=-3 \end{cases}$ ( sist. Imp. ) iii) $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ 2x+y=-3 \end{cases}$ ( -1 ; -1 )

## 9) Problemi di geometria da risolvere con un sistema.

**Per ogni esercizio fai un disegno, ragiona nella scelta delle incognite e nell'impostazione del sistema.**

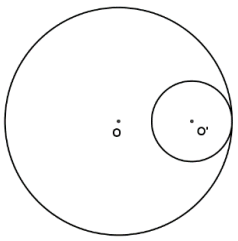
1) In **un rettangolo** di perimetro 20 cm, la somma della base e del doppio dell'altezza vale 14 cm. Dopo aver calcolato la misura dei lati, calcola l'area.
[24 cm$^2$]

2) In **un trapezio isoscele**, di perimetro uguale a 30 cm, la somma delle due basi è di 20 cm, e l somma dei due lati obliqui è inferiore di 1 cm alla somma del lato obliquo con la base minore. Quanto misurano i lati del trapezio? Quanto misura la superficie del trapezio? [14 cm; 6 cm; 5 cm]

3) In **un triangolo** ABC l'angolo in A è 20° in meno dell'angolo in B, il quale a sua volta è 20° in meno dell'angolo in C. Determina le ampiezze dei tre angoli. Classifica il triangolo secondo gli angoli e secondo i lati.

4) Determina la misura delle diagonali **d'un rombo**, sapendo che la loro somma è 12 cm e che, se aumenti la diagonale minore di 4 cm e diminuisci la maggiore di 6 cm, ottieni un altro rombo la cui area supera di 2 cm$^2$ l'area del primo. [2 cm; 10 cm]

5) Calcola le lunghezze dei **raggi delle due circonferenze**, sapendo che $|OO'| = 12{,}4$ cm e che la somma dei diametri è di 52 cm. I due cerchi sono simili? Quale sarà il rapporto tra le due circonferenze? E tra le due aree? [6,8 cm; 19,2 cm]




6) Il **triangolo ABC, rettangolo** in A, ha i cateti lunghi rispettivamente 42 cm e 56 cm. Determina sull'ipotenusa BC un punto D in modo che, condotte da D le rette parallele ai cateti, il rettangolo così formato abbia il perimetro uguale alla metà di quello del triangolo e il rapporto dei suoi lati sia uguale a quello dei cateti. Quante soluzioni esistono? [18 cm; 24 cm; .....]

**7)** **Il rapporto** fra i lati **d'un rettangolo** è $\frac{2}{3}$ e il perimetro è uguale a cinque volte il lato minore. Determina la misura dei lati. [ 😉 😊 😊]

**8)** Calcolare l'area totale ed il volume **d'una piramide retta** a base quadrata, sapendo che la somma tra i $\frac{2}{3}$ dell'altezza e metà dell'apotema è 5,4 cm e che la differenza tra il doppio dell'apotema e un quarto dell'altezza è 11,1 cm. [3,6 cm; 6 cm; 207,36 $cm^2$; 110,592 $cm^3$]