Da "Matemagica" d' Ivan Moscovich Ed. Rizzoli.

1) Il triangolo di Pascal. BM 4 pag. 92 es. 43.



BLAISE PASCAL

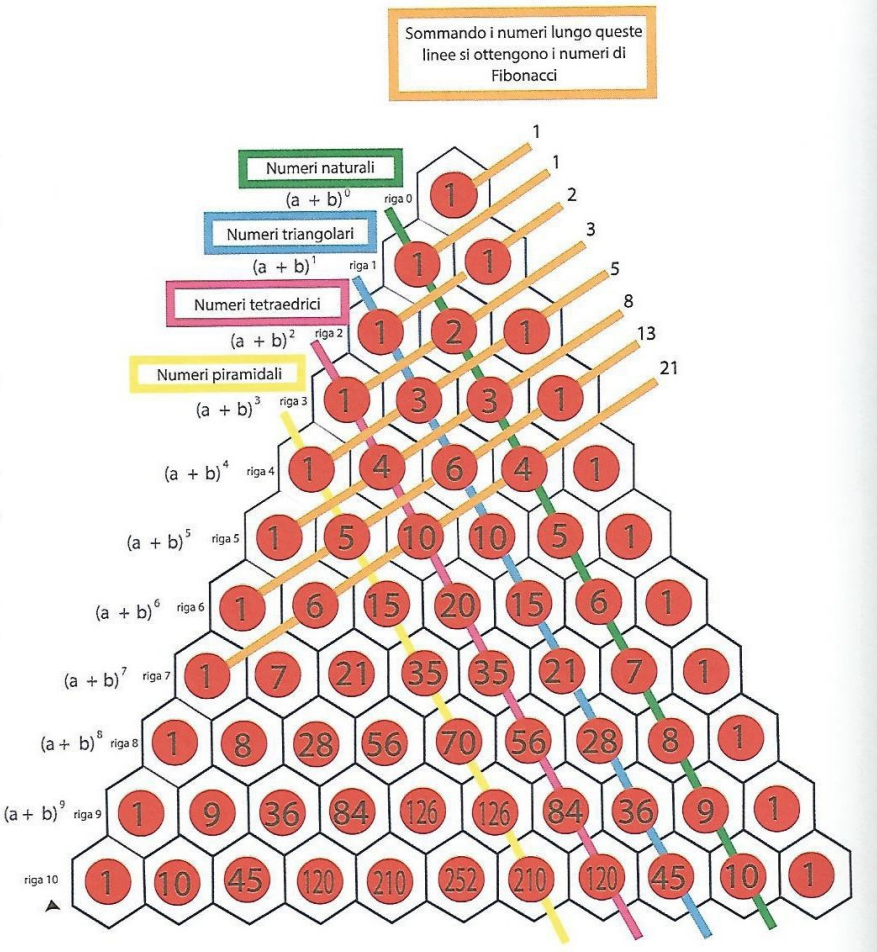
Blaise Pascal (1623-1662) fu un matematico, fisico, inventore, scrittore e filosofo francese di impronta cattolica. Bambino prodigio, fu istruito dal padre, che faceva l'esattore delle tasse a Rouen. Con il suo primo lavoro sulle scienze naturali e applicate diede un importante contributo allo studio dei fluidi e rese più chiari i concetti di pressione e di vuoto, generalizzando l'opera di Evangelista Torricelli. Nei suoi scritti, inoltre, Pascal difese il metodo scientifico. Nel 1642, non ancora ventenne, iniziò un pionieristico lavoro sulle macchine di calcolo e dopo tre anni di tentativi e cinquanta prototipi inventò la calcolatrice meccanica. Ne costruì venti esemplari (le cosiddette "pascaline"). La sua salute malferma, soprattutto dopo i 18 anni, lo condusse a una morte prematura due mesi dopo il trentanovesimo compleanno.

IL TRIANGOLO DI PASCAL

Uno degli schemi numerici più belli e più utili di tutta la matematica è il famoso triangolo di Pascal. Qui ne abbiamo riportato le prime dieci righe. Sapreste scoprire la regola con cui è costruito e aggiungere altre righe? La prima compilazione di questo schema numerico si deve agli antichi cinesi, ma fu Blaise Pascal a scoprire le sue numerose regolarità e i suoi molti impieghi, cosa che ha fatto del triangolo di Pascal uno strumento importantissimo in molti campi della matematica. Le cifre del triangolo di Pascal indicano il numero di possibili vie per arrivare a quel numero stesso dalla riga zero.

119

DIFFICOLTÀ
COSA SERVE
RISOLTO
TEMPO



$$(a+b)^{10} = 1a^{10} + 10a^9 b + 45a^8 b^2 + 120a^7 b^3 + 210a^6 b^4 + 252a^5 b^5 + 210a^4 b^6 + 120a^3 b^7 + 45a^2 b^8 + 10a b^9 + 1b^{10}$$

2) Il principio di cavalieri. BM2 pag. 75 - BM3 pag. 48 es. A - BM4 pag. 52.



IL PRINCIPIO DI CAVALIERI - 1630

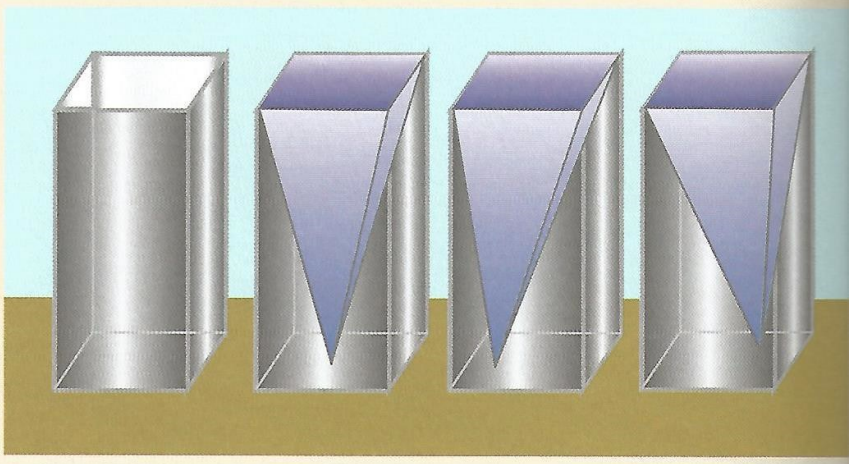
Il matematico Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647) divenne noto per il suo lavoro sui problemi di ottica e sul moto e per l'introduzione in Italia dei logaritmi. Il principio di Cavalieri usato in geometria anticipa in parte il calcolo integrale. Il fatto che il volume di ogni piramide, qualunque sia la sua base (per esempio circolare come quella del cono, quadrata come quella delle piramidi egizie o di qualunque altra forma), sia sempre (1/3) x *base* x *altezza* può essere ricavato dal principio di Cavalieri.

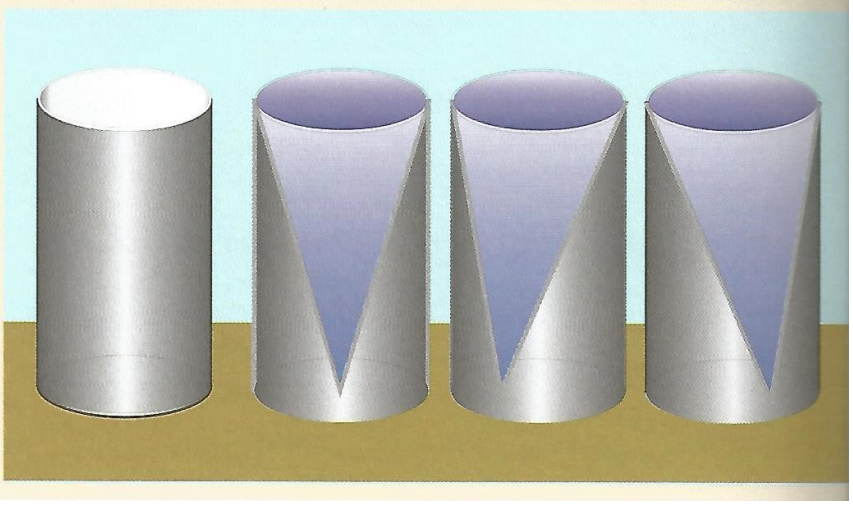
117

DIFFICOLTÀ ● ● ● ○ ○ ○
COSA SERVE
RISOLTO TEMPO

IL VOLUME DI CONI E PIRAMIDI

I tre coni e le tre piramidi hanno la stessa base e la stessa altezza del relativo cilindro o parallelepipedo e sono pieni d'acqua. L'acqua viene versata dai coni al cilindro e dalle piramidi al parallelepipedo. Quanto volume dei due solidi sarà occupato dall'acqua?





3) Fibonacci.

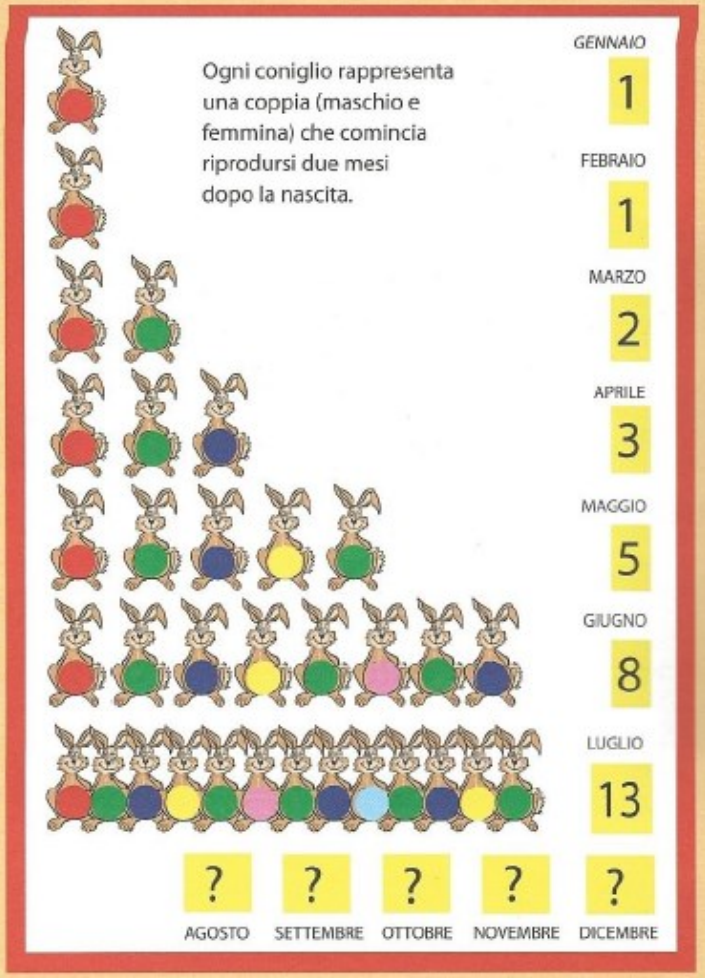


FIBONACCI (1170-1250)

Fibonacci, soprannome di Leonardo Pisano, nacque a Pisa, ma studiò in Nordafrica. Di lui e della sua famiglia si sa molto poco, e gran parte delle informazioni che abbiamo sono tratte dalle note autobiografiche che lui stesso includeva nei suoi libri.

Fibonacci è considerato uno dei matematici di maggior talento del Medioevo. Fu lui a introdurre in Occidente il sistema numerico decimale che sostituì i numeri romani. Nel corso dei suoi studi in Africa aveva usato i simboli indo-arabi (0-9) anziché quelli romani, che non avevano lo zero né davano valore alla posizione, e che per questo richiedevano l'utilizzo dell'abaco.

I numeri di Fibonacci hanno uno stretto collegamento con i numeri di Lucas (*v. p. 103*), e sono anche intimamente collegati al rapporto aureo, dato che le migliori approssimazioni razionali del rapporto sono 2/1, 3/2, 5/3 e 8/5. Compaiono poi anche negli organismi viventi, per esempio nei rami degli alberi, nella disposizione delle foglie del *Phyllotaxis*, nella fioritura del carciofo, nelle felci, nei coni di pino...



IL PROBLEMA DEI CONIGLI DI FIBONACCI - 1202

Uno dei più noti quesiti di matematica ricreativa sulle sequenze numeriche è il seguente: quante coppie di conigli possono essere generate in un anno, se ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia e la nuova coppia comincia a riprodursi due mesi dopo la nascita?

Questo astratto problema di allevamento di conigli comparve nel 1202 nel *Liber Abaci* del matematico italiano Leonardo Pisano, detto il Fibonacci, all'epoca trentaduenne.

L'ipotesi di Fibonacci è che ogni coppia di nuovi nati sia maschio-femmina e che i due comincino a riprodursi due mesi dopo la nascita, mentre in realtà la maturità sessuale dei conigli arriva a quattro mesi. Questo enigma matematico squisitamente teorico genera la sequenza numerica di Fibonacci, una sequenza che in seguito fu riscontrata ovunque in natura. Che coincidenza!

Riuscite a calcolare quanti conigli nasceranno nel corso dell'anno?

79

DIFFICOLTÀ ● ● ● ● ○ ○
COSA SERVE
RISOLTO TEMPO

LA SEQUENZA DI FIBONACCI E IL RAPPORTO AUREO

In matematica, i numeri di Fibonacci sono quelli della sequenza numerica raffigurata qui sotto, che cresce senza fine. Sono mostrati i primi 13 numeri: riuscite a dedurre la logica della sequenza e a continuarla? Riuscite indovinare qual è la straordinaria relazione tra i numeri della sequenza di Fibonacci e il rapporto aureo, il cui valore, detto φ (phi), è circa 1,618?

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

80

DIFFICOLTÀ ●●●●●○
COSA SERVE
RISOLTO ○ TEMPO

SEQUENZE DI LUCAS E NUMERI DI LUCAS

I numeri di Lucas non vanno confusi con le sequenze di Lucas, che sono una categoria di sequenze cui appartengono i numeri di Lucas. Éduard Anatole Lucas (1842-1891) studiò tanto le sequenze che portano il suo nome quanto quella strettamente collegata ai numeri di Fibonacci.

I numeri di Lucas e quelli di Fibonacci formano esempi complementari di sequenze di Lucas. In matematica, una relazione ricorsiva è un'equazione che definisce una sequenza: uno o più termini iniziali (dati) definiscono tutti i termini successivi.

Le sequenze di Lucas sono sequenze di interi che soddisfano relazioni ricorsive. Alcuni esempi famosi di sequenze di Lucas sono i numeri di Fibonacci, i numeri di Mersenne, i numeri di Pell, i numeri di Lucas, i numeri di Jacobsthal e così via.

Come per i numeri di Fibonacci, ogni nuovo numero di Lucas è dato dalla somma dei due precedenti. Di conseguenza, il rapporto tra due numeri di Lucas consecutivi converge verso il rapporto aureo. La differenza è che i due primi numeri di Lucas sono 2 e 1 anziché 0 e 1, per cui le proprietà dei numeri di Lucas sono un po' diverse da quelle dei numeri di Fibonacci.

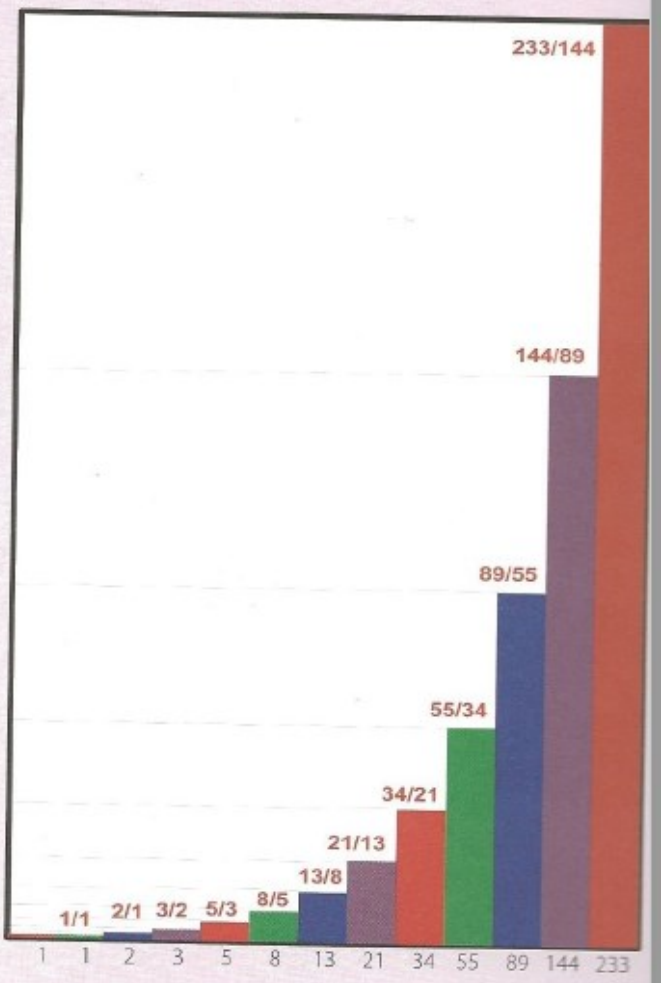
La sequenza numerica di Lucas è:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

In effetti, se una serie viene formata sommando i due ultimi valori per ottenere il successivo, si finirà sempre per arrivare a termini il cui rapporto si avvicina a φ = 1,6180330, da qualunque coppia di numeri si parta.

LA SCALA NUMERICA DI FIBONACCI

I numeri rossi mostrano come crescono i numeri di Fibonacci l'u rispetto all'altro guardando il quoziente di due numeri consecu Scoprite quanto cambiano queste frazioni (un numero di Fibonacci diviso per il precedente) a mano a mano che la sequenza cresce. Quale sarà il sorprendente finale di questa lun lista? È possibile esprimere ogni numero naturale come somma numeri di Fibonacci? Riuscireste, per esempio, a formare il nume naturale 232 usando i primi 13 numeri di Fibonacci?



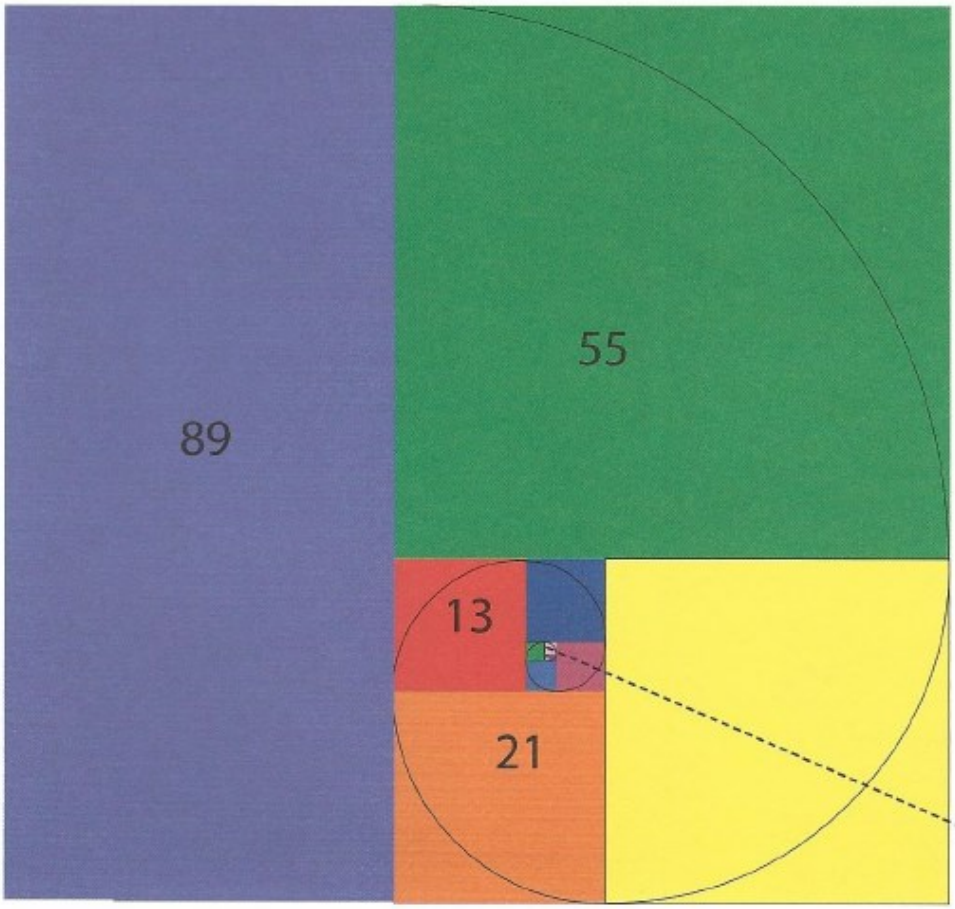
81

DIFFICOLTÀ ●●●●●○
COSA SERVE
RISOLTO ○ TEMPO

IL RETTANGOLO DI QUADRATI DI FIBONACCI

Per molto tempo il rettangolo di quadrati di Fibonacci è stato associato a un antico problema irrisolto: si può tassellare il piano infinito con quadrati tutti di dimensioni diverse? Fino al 1938 il problema era considerato senza soluzione. Il rettangolo di Fibonacci era quanto più vi si avvicinava, perché sfruttava la sequenza di quadrati di Fibonacci: costruendo un rettangolo di Fibonacci con quadrati consecutivi che abbiano i lati lunghi quanto i numeri consecutivi di Fibonacci si può coprire un'area grande a piacere. Nella nostra spirale antioraria di numeri di Fibonacci, una parte dell'ultimo quadrato esce già dalla pagina (l'area viola).

C'è solo un problema: il rettangolo di Fibonacci inizia con due quadrati unitari identici, il che contraddice la condizione che tutti i quadrati abbiano dimensioni diverse. Risolvendo un altro problema, avremmo anche la soluzione alla sfida della tassellatura infinita: si può suddividere un quadrato in quadrati più piccoli tutti diversi? La risposta arrivò nel 1938 (*v. i quadrati perfetti nel capitolo 7*). Sostituendo con un Quadrato Perfetto il primo quadrato unitario (nero) del rettangolo di Fibonacci si risolve il problema della tassellatura infinita.

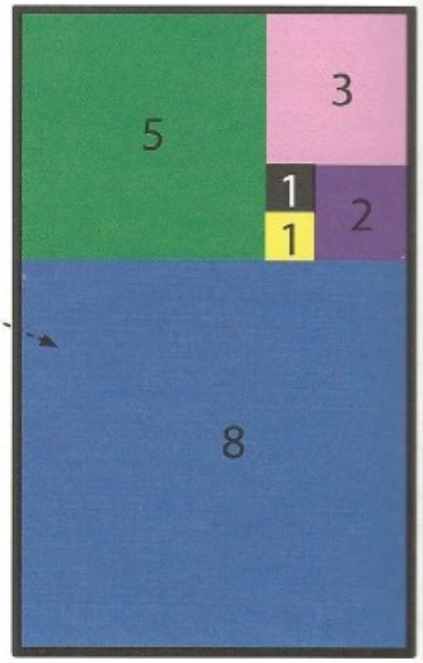


82

DIFFICOLTÀ
COSA SERVE
RISOLTO TEMPO

IL RETTANGOLO DI FIBONACCI

Tassellatura del piano con la spirale antioraria formata dai primi 13 quadrati di Fibonacci. Il tredicesimo quadrato (viola) esce dall'area della pagina. I quadrati e la spirale possono proseguire all'infinito coprendo il piano. Quanto grande sarà il prossimo quadrato della sequenza?



4) Archimede: Il coltello del calzolaio – Il Salinon. BM4 pag. 89 es. 35.

IL COLTELLO DEL CALZOLAIO

Archimede fu il primo a studiare l'Arbelos – in greco, coltello del calzolaio – nel suo *Libro dei lemmi*.

L'Arbelos è formato da tre semicerchi, due dei quali disposti lungo il diametro del terzo, di qualunque grandezza (aree rosse).

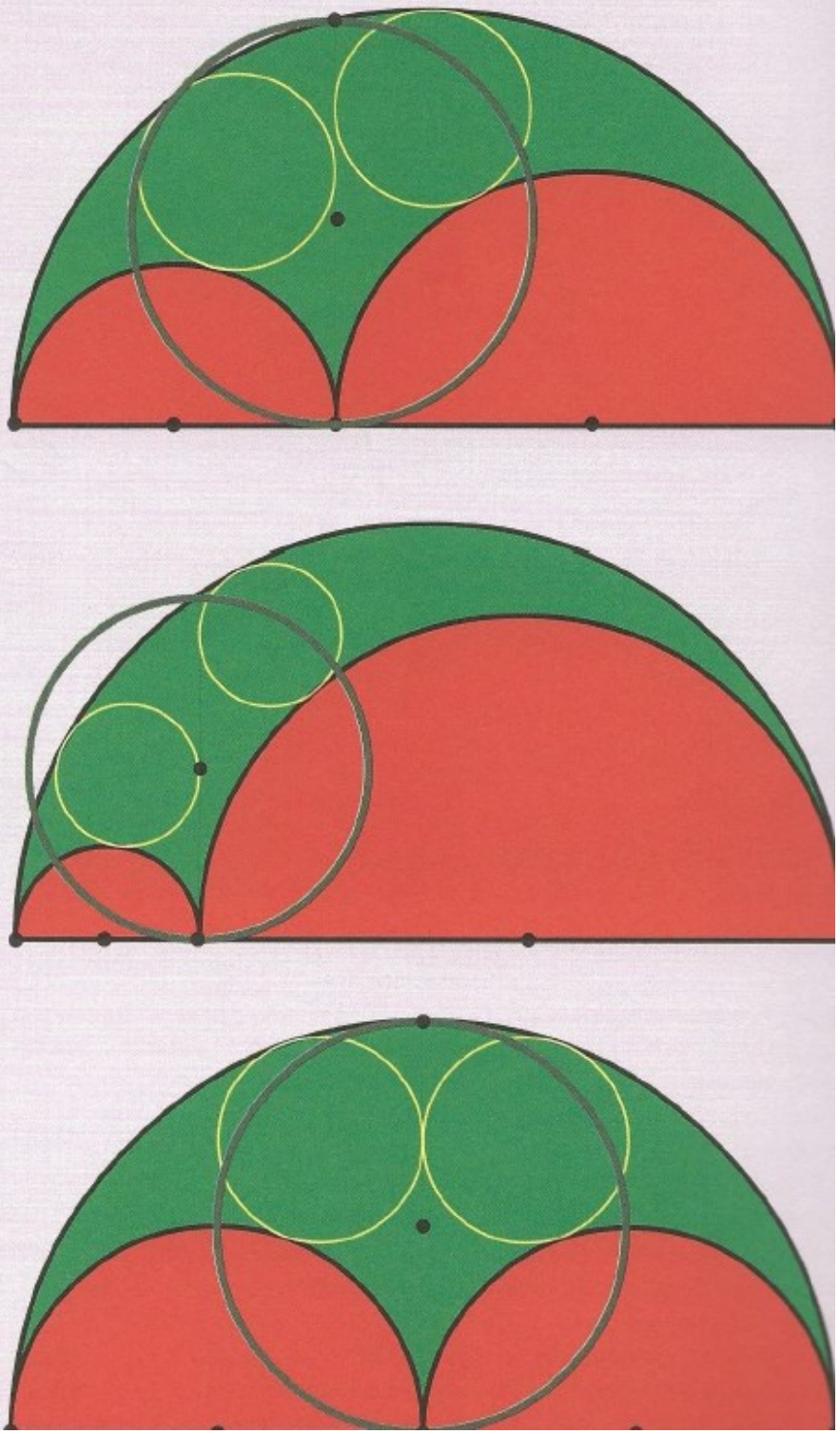
Questa figura ha proprietà sorprendenti e controintuitive. Citiamo almeno le tre più strane. Archimede scoprì che l'area tra i semicerchi (in verde) è uguale all'area del cerchio che ha il diametro uguale al segmento di perpendicolare che va dal punto di contatto dei due semicerchi più piccoli alla circonferenza del più grande, come mostrato nei tre esempi (cerchio verde). Questo risultato diventa ovvio nel caso in cui i due semicerchi siano uguali (in basso).

La somma delle lunghezze dei due archi più piccoli è uguale alla lunghezza dell'arco maggiore.

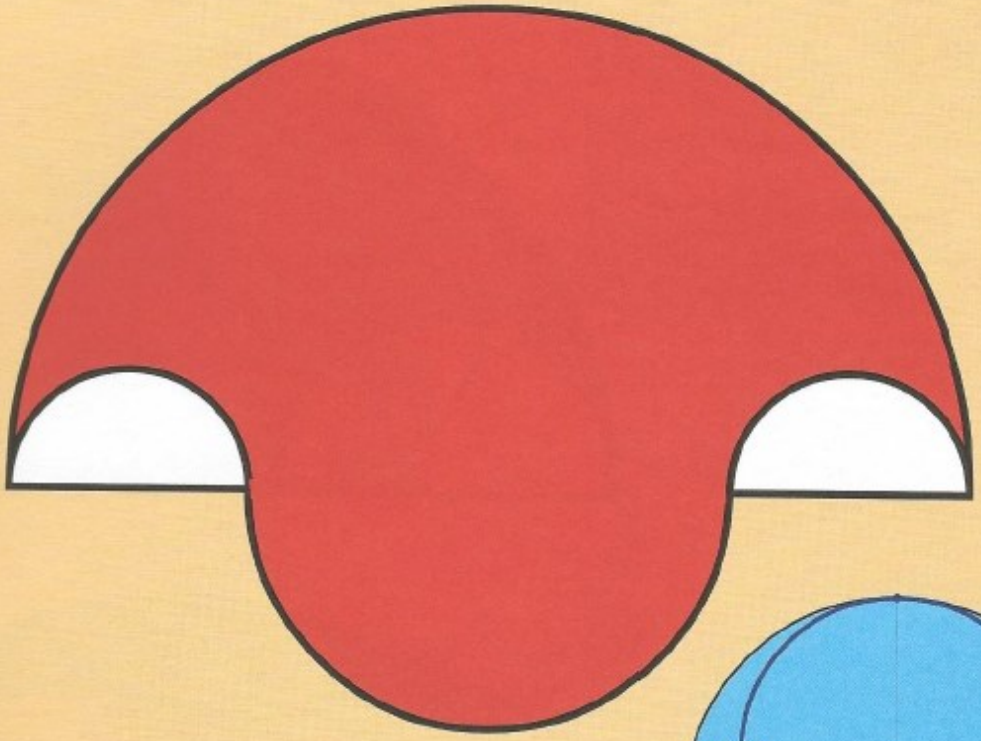
I due cerchi gemelli più piccoli (in giallo) che toccano la perpendicolare e i due archi sono identici indipendentemente dalle dimensioni dei due semicerchi più piccoli.

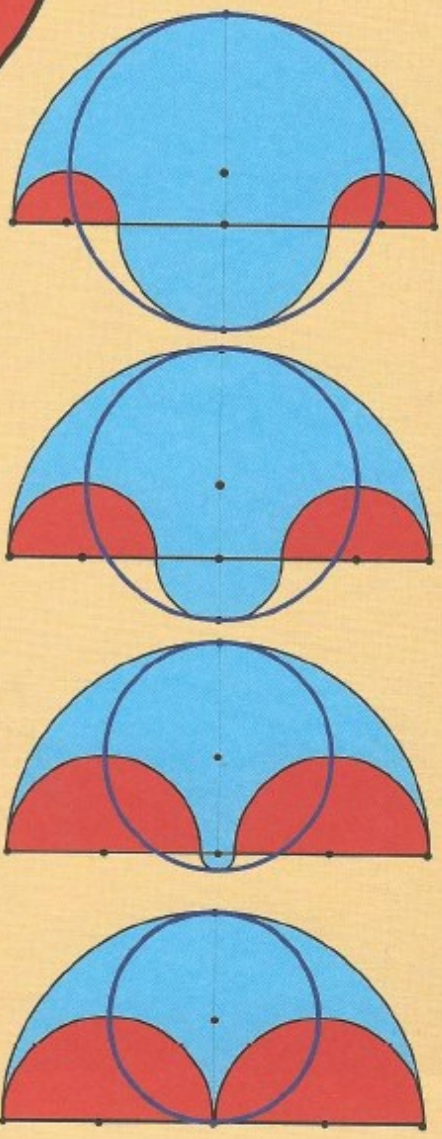
Per cinquecento anni l'Arbelos fu dimenticato, fino a quando Pappo non riprese a studiarlo scoprendone altre stupefacenti proprietà.

Di recente, Leon Nankoff e Victor Thebault hanno pubblicato un corposo testo sull'Arbelos, rivelandone varie altre proprietà in precedenza sconosciute.



...chiaramente proverai a atteggiarti in un "piccolo" Archimede disegnando la situazione.





IL SALINON DI ARCHIMEDE – 200 A.C.

Il Salinon è un'elegante figura studiata da Archimede, che deve il nome a un antico scudo greco. La sua superficie è quella compresa tra quattro semicerchi, tre dei quali sono disposti lungo il diametro del semicerchio più grande. I due semicerchi laterali sono uguali tra loro e interni al semicerchio maggiore, mentre quello centrale è tracciato dalla parte opposta rispetto al semicerchio.

Archimede dimostrò che l'area del Salinon è uguale a quella del cerchio che ha per diametro la perpendicolare tracciata a metà della figura, le cui estremità si trovano su semicirconferenze opposte, come si vede nei quattro esempi con semicerchi interni di dimensioni diverse.

Si noti che nel terzo esempio, nel quale il semicerchio centrale quasi scompare, ci si avvicina a un caso speciale del Salinon, quello in cui il quarto semicerchio ha diametro zero. Avrete notato che si tratta dell'Arbelos, o coltello del calzolaio (*v. p. precedente*).

È davvero sorprendente che Archimede possa aver scoperto queste relazioni senza gli strumenti matematici disponibili oggi... un'impresa straordinaria, una testimonianza di autentica creatività.

...chiaramente proverai a atteggiarti in un "piccolo" Archimede disegnando la situazione.

5) .