LA TEORIA IN SINTESI

Le equazioni di secondo grado

1. Che cosa sono le equazioni di secondo grado

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{con } a \neq 0.$$

Sono presenti un termine di secondo grado (ax^2), uno di primo grado (bx) e un termine noto (c). Se entrambi i coefficienti b e c sono diversi da 0, l'equazione è **completa**, altrimenti è **spuria** se $b \neq 0$ e $c = 0$, **pura** se $b = 0$ e $c \neq 0$, **monomia** se $b = 0$ e $c = 0$.

ESEMPIO $4x^2 + 3x - 5 = 0$ è un'equazione di secondo grado completa;
$2x^2 = 0$ è monomia; $5x^2 - 3 = 0$ è pura; $7x^2 + x = 0$ è spuria.

2. La risoluzione di un'equazione di secondo grado

Il **discriminante** dell'equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$ è $\Delta = b^2 - 4ac$.

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO COMPLETE

SEGNO DEL DISCRIMINANTE	SOLUZIONI	ESEMPIO
$\Delta > 0$	due radici reali e distinte: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x^2 - 2x - 3 = 0$; $\Delta = 4 + 3 \cdot 4 = 16$; $x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$; $x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$
$\Delta = 0$	due radici reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$4x^2 - 4x + 1 = 0$; $\Delta = 16 - 4 \cdot 4 = 0$; $x_1 = x_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali	$2x^2 + 3x + 3 = 0$; $\Delta = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -15$

Se il coefficiente di x, cioè b, è divisibile per 2, per risolvere l'equazione si può applicare la **formula ridotta**.

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac; \quad x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}, \quad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}.$$

SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

TIPO DI EQUAZIONE	EQUAZIONE	SOLUZIONI	ESEMPIO
pura ($b = 0, c \neq 0$)	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}; x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ le radici sono reali solo se a e c sono discordi.	$6x^2 - 5 = 0$; $x_1 = \sqrt{\frac{5}{6}}; x_2 = -\sqrt{\frac{5}{6}}$

Le equazioni numeriche intere

Le equazioni complete

ESERCIZIO GUIDA

48 Risolviamo le seguenti equazioni:

a) $10x^2 - 2 = x$; b) $49x^2 + 126x + 81 = 0$; c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

a) $10x^2 - 2 = x$.

Scriviamo l'equazione in forma normale:

$10x^2 - x - 2 = 0$.

Calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-2) = 1 + 80 = 81$.

Poiché $\boldsymbol{\Delta > 0}$, l'equazione ha due soluzioni reali distinte.

Usiamo la formula risolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot (10)} = \begin{cases} \dfrac{1+9}{20} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-9}{20} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$x_1 = \dfrac{1}{2}$ e $x_2 = -\dfrac{2}{5}$.

b) $49x^2 + 126x + 81 = 0$.

L'equazione è già in forma normale.

$\Delta = (126)^2 - 4 \cdot 49 \cdot 81 = 15\,876 - 15\,876 = 0$.

Poiché $\boldsymbol{\Delta = 0}$, l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.

Calcoliamo le soluzioni con la formula $x = -\dfrac{b}{2a}$:

$x = \dfrac{-126}{2 \cdot (49)} = -\dfrac{63}{49} = -\dfrac{9}{7}$.

Le soluzioni coincidenti sono:

$x_1 = x_2 = -\dfrac{9}{7}$.

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Scriviamo i coefficienti:

$a = 1$; $b = -2$; $c = 2$.

Calcoliamo il discriminante:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (2) = -4$.

Poiché $\boldsymbol{\Delta < 0}$, l'equazione non ha radici reali.

Risolvi le seguenti equazioni.

49 $6x^2 + 13x + 7 = 0$ $\left[-1, -\dfrac{7}{6}\right]$

50 $4x^2 - 8x + 3 = 0$ $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$

51 $x^2 - 2x - 3 = 0$ $[-1, 3]$

52 $9x^2 - 12x + 4 = 0$ $\left[\dfrac{2}{3}\text{ doppia}\right]$

53 $x^2 + 3x - 10 = 0$; $12x^2 + x - 6 = 0$. $\left[-5, 2; -\dfrac{3}{4}, \dfrac{2}{3}\right]$

54 $2x^2 - 3x + 20 = 0$; $6x^2 + 13x + 8 = 0$. [impossibile; impossibile]

55 $x^2 - 4x - 32 = 0$; $x^2 + x + \dfrac{2}{9} = 0$. $\left[-4, 8; -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right]$

56 $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x^2 - \dfrac{5}{3}x + \dfrac{25}{36} = 0$. $\left[-4, 1; \dfrac{5}{6}\text{ doppia}\right]$

57 $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x^2 - 9x + 33 = 0$. [1, 2; impossibile]

58 $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$; $x^2 - 4\sqrt{3}x - 36 = 0$. $[-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}; -2\sqrt{3}, 6\sqrt{3}]$

59 $x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$; $x^2 - \sqrt{5}x + 2 = 0$. $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$; impossibile]

6. EQUAZIONI DI SECONDO GRADO E PROBLEMI

Teoria a pagina 804

Problemi sui numeri

681 TEST Un numero intero supera di 3 la sedicesima parte del suo quadrato. Quale delle seguenti equazioni ha tale numero come soluzione?

A $\frac{1}{16}x^2 - x + 3 = 0$ C $x = 3 + \frac{1}{16}(2x)$

B $x + 3 = \frac{1}{16}x^2$ D $16x^2 - x + 3 = 0$

682 Trova quali numeri reali sono tali che la somma del numero con il suo quadrato è 6. [−3; 2]

683 Se si diminuisce la metà del quadrato di un numero della terza parte del successivo del numero stesso, si ottiene il prodotto tra il precedente del numero e l'opposto di $\frac{1}{3}$. Determina i numeri che soddisfano la condizione. $\left[\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

684 Determina quale numero intero è tale che la differenza tra la somma del suo quadrato con il doppio del suo quadrato e il prodotto tra il precedente del numero e il numero stesso diminuito di 2 sia uguale a 3. [1]

685 Trova un numero diverso da zero tale che il suo quadrato diminuito del 20% sia uguale al numero stesso aumentato del 50%. $\left[\frac{15}{8}\right]$

686 ESEMPIO DIGITALE Determina due numeri naturali tali che la loro differenza sia 8 e la somma della loro somma e del loro prodotto sia 64.

687 Trova due numeri naturali, sapendo che la loro differenza è 11 e la differenza fra il quadruplo del quadrato del minore e il quadrato del maggiore è 159. [14; 25]

688 **Scambiare cifre** La differenza fra un numero di due cifre e il numero formato dalle stesse cifre scambiate di posto è 18. Determina il numero, sapendo che il suo triplo è uguale a otto volte il prodotto delle sue cifre. [64]

689 Tra tutti i numeri di due cifre in cui la cifra delle unità supera di 2 quella delle decine, trova quelli che sono uguali al prodotto delle cifre aumentate di 22. [46; 57]

690 Trova il numero razionale positivo tale che la differenza tra il numero stesso e il suo reciproco sia 2,1. $\left[\frac{5}{2}\right]$

691 Dato un numero naturale, moltiplicando il suo successivo per il triplo del numero aumentato di 2, si ottiene il 1064. Qual è il numero? [18]

692 Il quadrato del precedente di un numero naturale è uguale alla differenza tra il cubo del numero e 46, divisa per il numero aumentato di 2. Determina il numero. [16]

693 **Numeratore e denominatore** In una frazione il denominatore supera di 3 il numeratore. Sottraendo alla frazione il reciproco del numeratore, si ottiene $\frac{17}{40}$.
Qual è la frazione? $\left[\frac{5}{8}\right]$

694 **Pari e dispari** Il prodotto di un numero pari per il numero dispari a esso successivo dà come risultato 156. Qual è il numero? [12]

695 Paolo pone un indovinello ad Alex: «Il numero civico di casa mia è composto da due cifre la cui somma è 14; la somma dei quadrati delle cifre vale 106 e il numero delle unità è maggiore del numero delle decine. Qual è il numero?» [59]



696 La divisione fra due numeri naturali dà per quoziente 10 e resto 16, mentre quella fra il quintuplo del maggiore e il quadrato del minore ha per quoziente 2 e resto 280. Determina i due numeri. [216; 20]

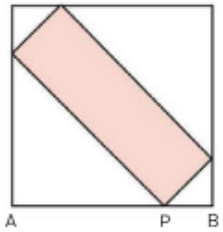
697 Tre numeri naturali pari consecutivi sono tali che il quadrato della loro somma diminuito della somma dei loro quadrati è uguale a 592. Trova i tre numeri. [8; 10; 12]

Problemi geometrici

SEGMENTI, PERIMETRI E AREE

701 ESEMPIO DIGITALE Dato un filo lungo 7 cm, in quanti e quali modi puoi dividerlo in due parti di lunghezze a e b tali che, se tagliassi dal pezzo di filo di lunghezza a una parte pari a $\frac{1}{4}$ della sua lunghezza, e poi tagliassi ancora altri 2 cm, il rettangolo che avrebbe per lati b e ciò che rimarrebbe di a avrebbe area di 1 cm^2?

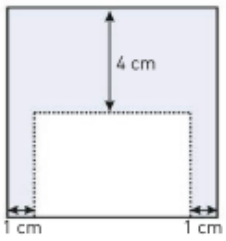
702 In un quadrato di lato AB è inscritto un rettangolo la cui area è i $\frac{3}{8}$ di quella del quadrato.
Se la lunghezza di AB è 28 cm, quanto può misurare AP?



[7 cm oppure 21 cm]

703 Quanti lati ha il poligono in cui il numero delle diagonali supera di 18 il numero dei lati? [9]

705 Un foglio quadrato Q viene ritagliato seguendo le linee tratteggiate come nella figura.
Determina l'area di Q sapendo che la parte che rimane è $\frac{5}{8}$ di Q.



[64 cm^2]

706 Determina il perimetro di un rettangolo di area 180 cm^2, sapendo che la base supera l'altezza di 3 cm. [54 cm]

707 Un rettangolo ha l'area di 216 cm^2 e il perimetro di 60 cm. Trova i lati. [12 cm, 18 cm]

708 La differenza tra le aree di due cerchi concentrici è 36π cm^2 e il rapporto tra le lunghezze delle rispettive circonferenze è $\frac{5}{4}$. Trova le lunghezze dei due raggi. [8 cm; 10 cm]

CON IL TEOREMA DI PITAGORA

731 Sulla semicirconferenza avente il diametro $AB = 60$ cm determina un punto C in modo che il triangolo ABC abbia un perimetro di 144 cm.
[$AC = 36$ cm o $AC = 48$ cm]

732 Calcola il perimetro di un triangolo di area uguale a 24 cm^2 inscritto in una semicirconferenza che ha il raggio di 5 cm. [24 cm]

733 Trova la misura della base di un triangolo isoscele di lato a, sapendo che il quadrato costruito sull'altezza è equivalente al rettangolo avente per lati la base e il lato obliquo del triangolo dato.
[$2(\sqrt{2}-1)a$]

734 Il triangolo ABC, isoscele sulla base $AB = 4$ cm, ha area uguale a 6 cm^2. Sulla semicirconferenza di diametro BC esterna al triangolo considera il punto D in modo che $A\widehat{C}D$ sia retto. Trova la lunghezza di AD in modo che $\overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 = -5$.
[$\sqrt{17}$ cm]

735 Un triangolo ha i lati lunghi 8 cm, 12 cm, 16 cm. Stabilisci se è possibile trasformarlo in triangolo rettangolo:
a. diminuendo i lati di una stessa quantità;
b. aumentando i lati di una stessa quantità.
[a) no; b) sì, 4 cm]

736 La base maggiore e l'altezza di un trapezio isoscele misurano rispettivamente 10 e 3. Determina la base minore in modo che la somma dei quadrati costruiti sulla base minore e sul lato obliquo sia equivalente al doppio del trapezio.
$\left[\frac{16 \pm 4\sqrt{11}}{5}\right]$

737 Nel rettangolo $ABCD$ la diagonale AC è lunga 10 cm; si consideri su tale diagonale la proiezione H del vertice B. Sapendo che l'area del rettangolo è 48 cm^2, determina la lunghezza di CH.
[3,6 cm ∨ 6,4 cm]

EUREKA! **Un quadrato triangolato** In un quadrato $ABCD$ di lato 1 cm, sono dati un punto M sul lato BC e un punto N sul lato CD tali che $BM \cong ND$. Si sa inoltre che l'area del triangolo AMN è pari a $\frac{4}{9}$ cm^2. Quanto vale la lunghezza del segmento ND?

A $\frac{1}{4}$ cm C $\frac{1}{2}$ cm E $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

B $\frac{1}{3}$ cm D $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ cm

[Giochi di Archimede, 2008]