Le Funzioni. BM4 Teoria pag. 61 – 77; Esercizi pag. 141 - 155

1) Il prodotto cartesiano – il grafo della relazione.

L'insieme delle coppie ordinate – **Il Prodotto cartesiano – Il grafo della relazione.**

Esempio:

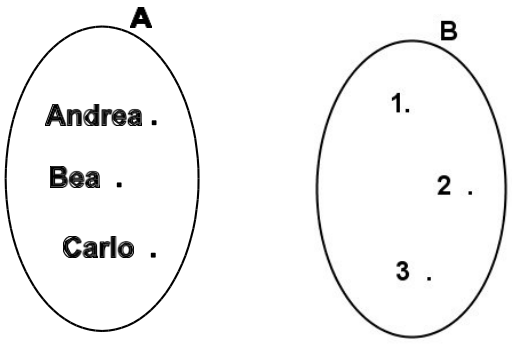
Andrea, Bea e Carlo si sfidano al gioco delle freccette; quanti e quali sono le possibili classifiche? Come posiamo rappresentarle?

Quali sono le possibili classifiche: .....

Quali posizioni può ottenere Andrea? .....

Matematicamente scriveremo: .....

Possiamo rappresentare la situazione con un ***diagramma sagittale*** (o a frecce)

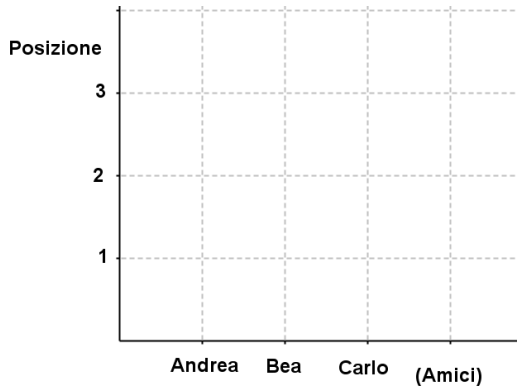


Considerando tutte le possibili posizioni dei tre amici, otteniamo un insieme di coppie, detto ***prodotto cartesiano*** tra gli insiemi **A e B**, che matematicamente scriveremo:

$$\mathbf{AxB} = \{(A;1);\ (A;2);\ (A;3);(B;1);\ (B;2);\ (B;3);(C;1);\ (C;2);\ (C;3)\}$$

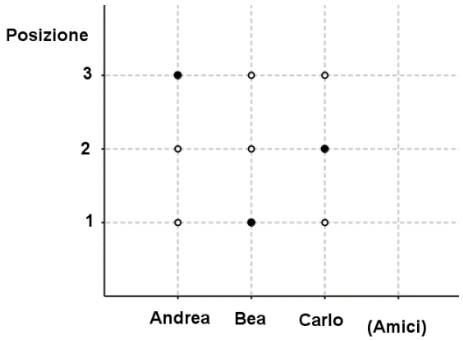
Il ***prodotto cartesiano AxB*** rappresenta l'insieme di tutte le coppie possibili.

Che possiamo raffigurare anche con una rappresentazione cartesiana, nel seguente modo:



Chiaramente vi sarà una sola classifica, che logicamente potrai definire nei tre modi precedenti:

a) Con una **rappresentazione cartesiana**: b) Con **diagramma sagittale** (o a frecce):



c) Con una rappresentazione in estensione, detta **grafo della relazione T**, che matematicamente scriveremo: G_T = {(… ; …); (… ; …);(… ; …) ; }

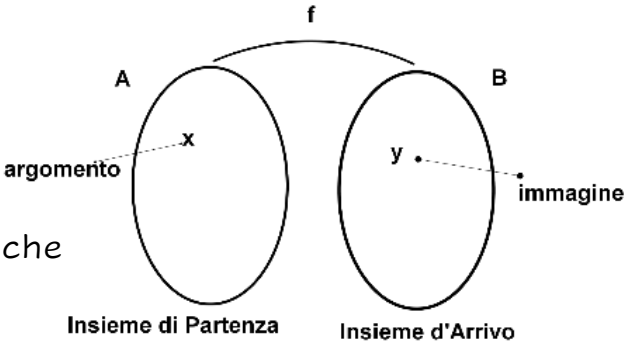
Da bravissimo allievo noterai immediatamente che il Grafo della relazione (G_T) è un.....del prodotto cartesiano (AxB). Matematicamente scriveremo: G_T ..... AxB.

Matematicamente diremo che abbiamo definito tra gli insiemi A e B, la relazione: T : "amico che abbia ottenuto un punteggio maggiore rispetto ad un altro concorrente" e scriveremo:

T : A ⟶ B ; Il punteggio di A maggiore di A_n

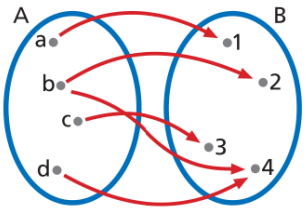
Ricorda!:

A è **l'insieme di Partenza**, mentre B è **l'insieme d'Arrivo**. Indicheremo con **x**, detto **argomento**, un elemento che appartiene **all'insieme di partenza** e con **y**, detto **immagine**, un elemento che appartiene **all'insieme d'arrivo**.



Esercizi:

a) Data la seguente relazione in forma sagittale, determina:



i) L'insieme di Partenza.

ii) L'insieme d'Arrivo.

iii) Il prodotto cartesiano AxB =

iv) Il grafo della relazione, G_R=

b) Dato l'insieme A= $\{x \in \mathbb{N} \setminus x \leq 10\}$, rappresenta con il diagramma a frecce e con il Grafo della relazione le seguenti relazioni, definite in AxA.

i) $x = y$ **ii)** $x > y$ **iii)** x · y = nr. dispari **iv)** x e y sono primi tra loro

c) Dato l'insieme B= $\{x \in \mathbb{Z} \setminus -3 \leq x < 4\}$, rappresenta con il diagramma a frecce e con il Grafo della relazione le seguenti relazioni, definite in BxB.

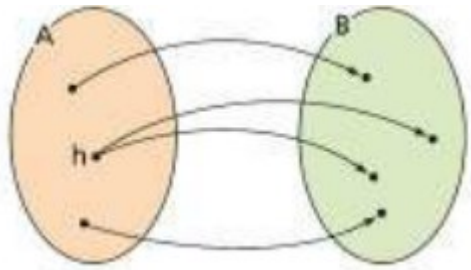
i) $x\,y \geq 0$ **ii)** $x + y = 0$ **iii)** $x + y < 0$ **iv)** $x + y > 1$

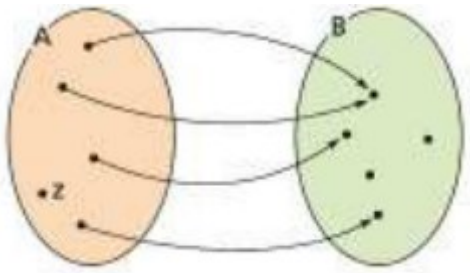
2) Il concetto di funzione.

Una relazione nella quale ogni elemento x dell'insieme di partenza è in relazione al massimo con un elemento y dell'insieme d'arrivo è detta FUNZIONE.

Esempi.

a) Deduci, motivando, quale dei due esempi rappresenta una funzione.

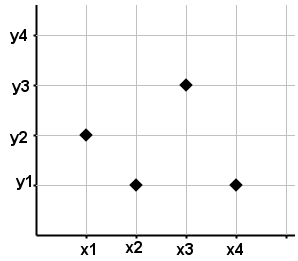


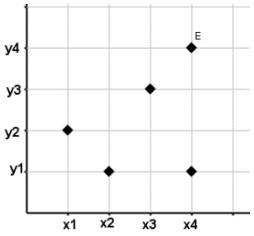


b) Deduci, motivando, quale dei due esempi rappresenta una funzione.

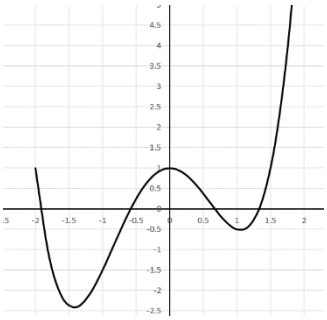
$G_f = \{(a;1)\ (b;2)(c;1)(d;3)\}$ $G_h = \{(a;1)\ (b;2)(c;1)(a;3)\}$

c) Deduci, motivando, quale dei due esempi rappresenta una funzione.

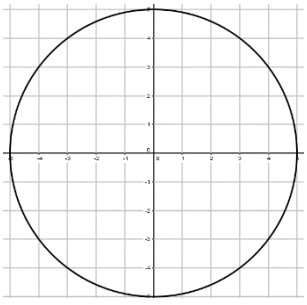




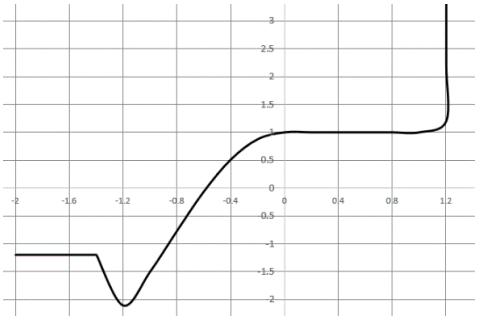
d) Deduci, motivando, quale di questi esempi rappresenta il grafico d'una funzione.



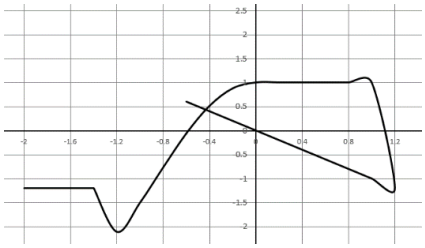
a:.....



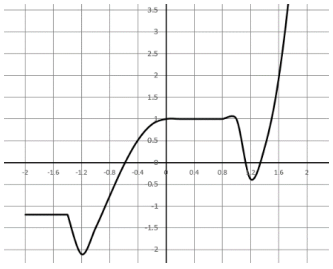
b:.....



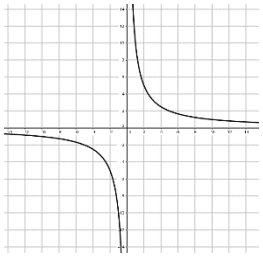
c:.....



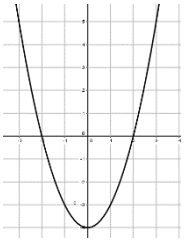
d:.....



e:.....



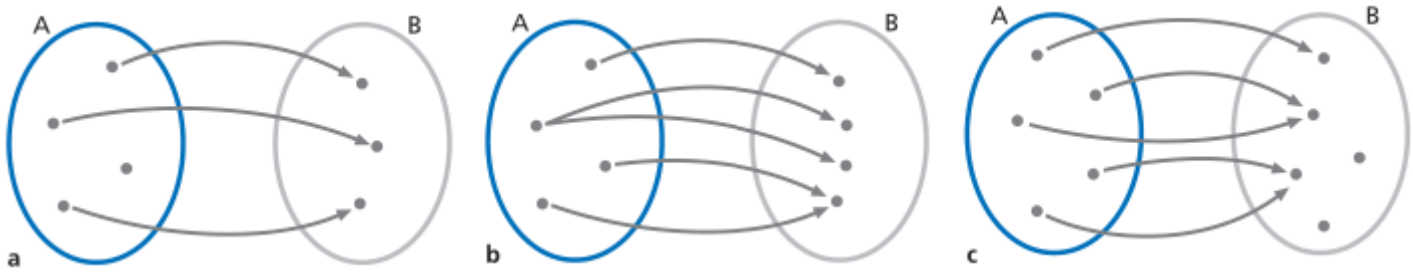
f:.....



g:.....

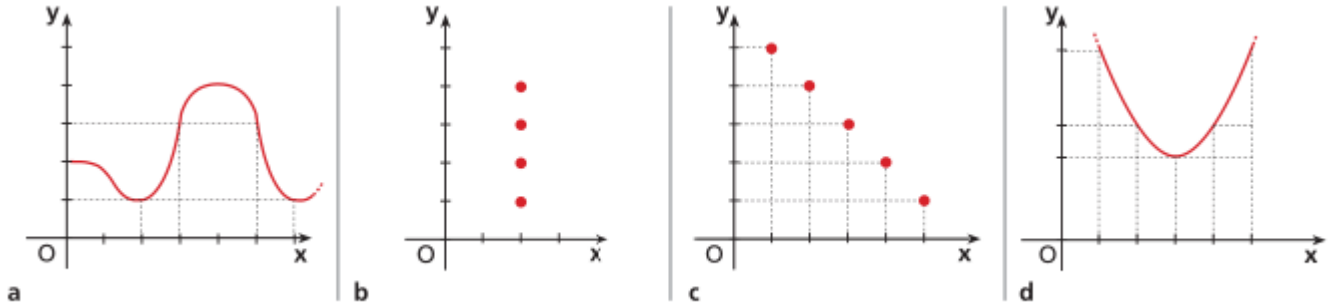
Esempio 1

Quali tra i seguenti diagrammi sagittali, rappresenta una funzione? Perché?



Esempio 2

Tra i seguenti diagrammi uno solo non rappresenta una funzione? Quale?

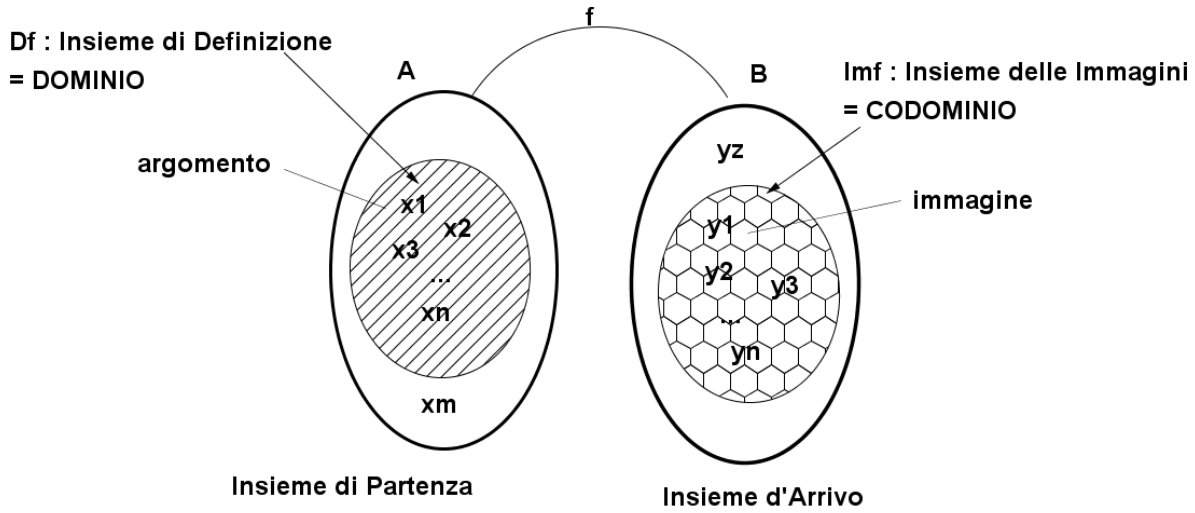


Perché? .....

3) L'insieme di definizione - l'insieme delle immagini d'una funzione.

Definita una funzione, **f** : **A** ⟶ **B** **x** ⟼ **y** = f(x)

Abbiamo:



A:..... **B**:.....

x:..... **y**:.....

D_f:..... Im_f:.....

x_1 ..... D_f y_1 ..... Im_f

x_m ..... D_f y_z ..... Im_f

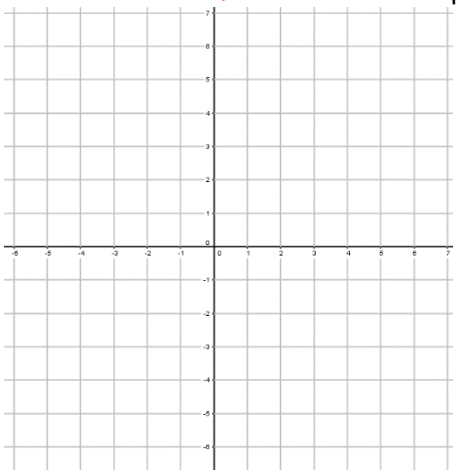
D_f.....A Im_f.....B

4) Rappresentazione grafica di alcune funzioni reali importati data la sua forma algebrica (equazione).

Caldamente raccomandato l'utilizzo di GeoGebra! BM4 pag. 68-69.

a) La funzione costante.

$k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto a$; che posso scrivere k(x) = a ; con $a \in \mathbb{R}$



D_k = ... Im_c = ...

$k(x) > 0$ .....

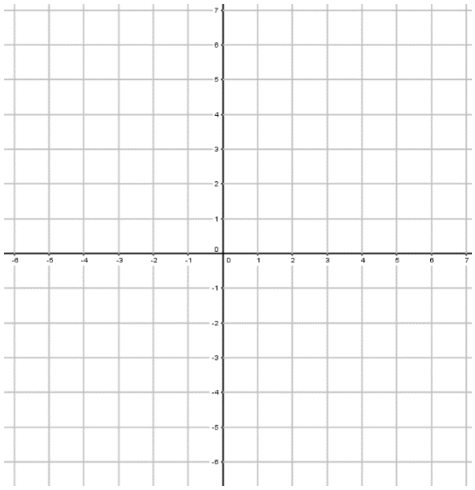
$k(x) = 0$ .....

$k(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

b) La funzione identità.

$i_d: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x$; che posso scrivere $i_d(x) = x$



D_{id} = ... Im_{id} = ...

$i_d(x) > 0$ .....

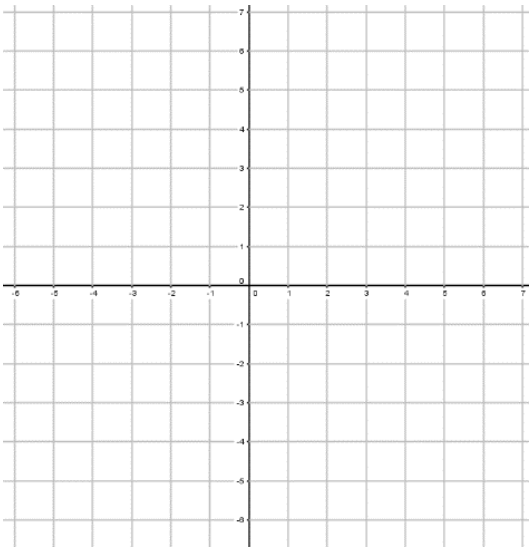
$i_d(x) = 0$ .....

$i_d(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

c) La funzione quadratica elementare.

$q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$; che posso scrivere $q(x) = x^2$



D_q = ... Im_q = ...

$q(x) > 0$ .....

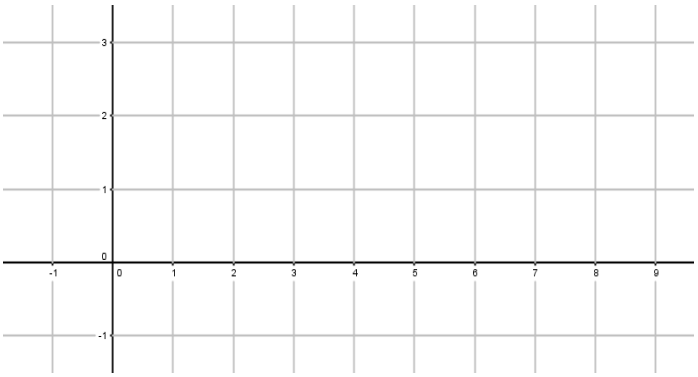
$q(x) = 0$ .....

$q(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

d) La funzione radice quadrata.

$r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; che posso scrivere $r(x) = \sqrt{x}$



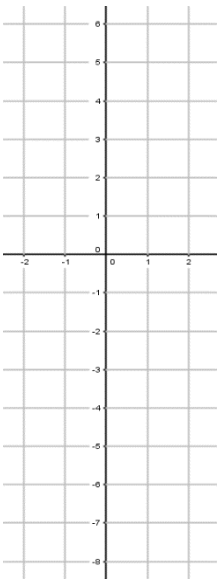
D_r = ... Im_r = ...

$r(x) = 0$ .....

$r(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

e) La funzione cubica elementare.



$w: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x^3$;che posso scrivere $w(x) = x^3$

D_w = ... Im_w = ...

$w(x) > 0$ .....

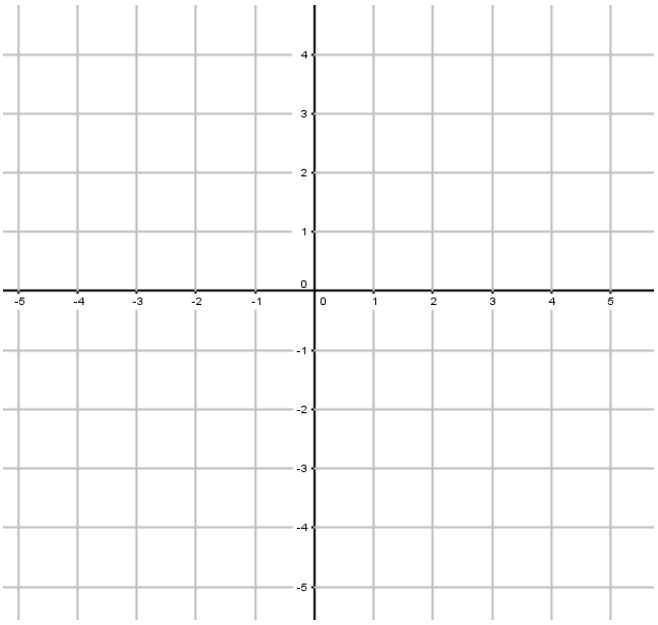
$w(x) = 0$ .....

$w(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

f) La funzione iperbolica elementare.

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; che posso scrivere $h(x) = \frac{1}{x}$



D_h = ... Im_h =.....

$h(x) > 0$ .....

$h(x) = 0$ .....

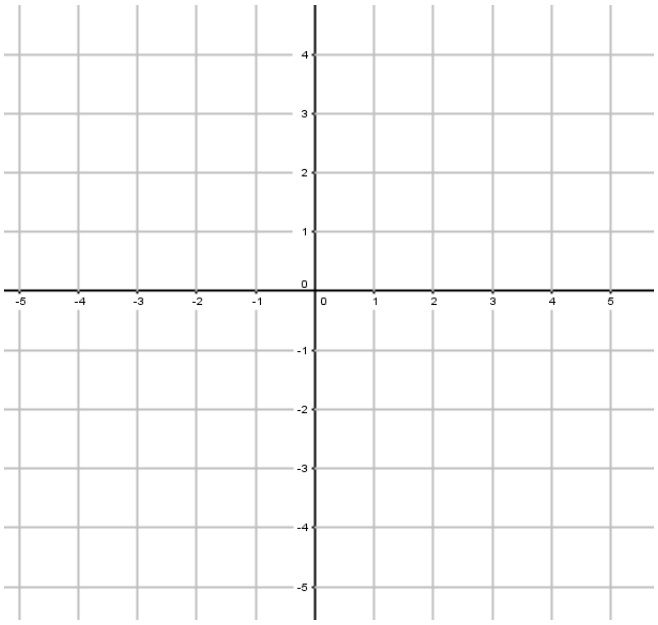
$h(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

g) La funzione valore assoluto.

$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto |x|$ che posso scrivere $v(x) = |x|$

Ricorda: $|+5| = \cdots \ldots \ldots \ldots$; $|-5| = \cdots \ldots \ldots \ldots$;



D_v = ... Im_v = ...

$v(x) > 0$ .....

$v(x) = 0$ .....

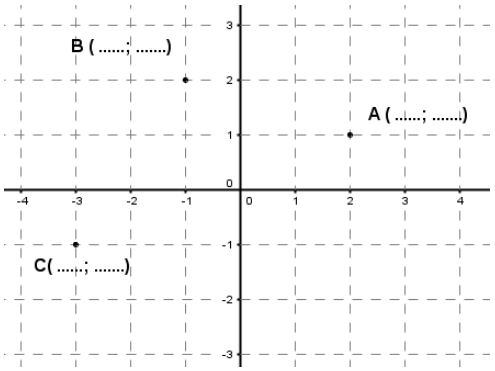
$v(x) < 0$ .....

Osservazioni:.....

5) Considerazioni per poter rappresentare alcune funzioni reali.

a) Il simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (Oy).

i) I punti. Rappresenta i simmetrici dei punti A, B e C rispetto ad Oy. Cosa noti?



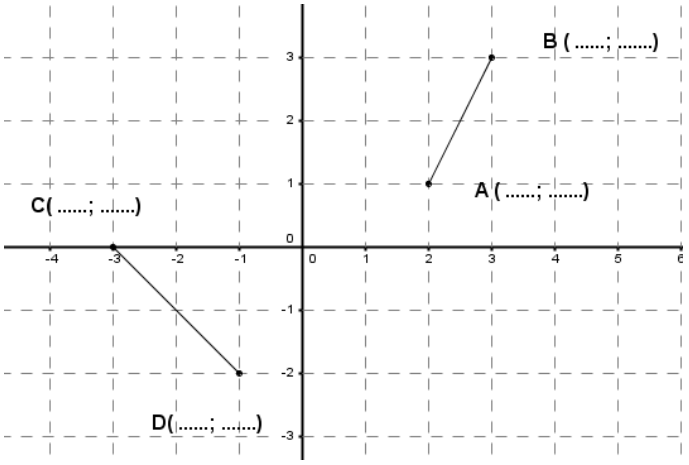
A (..... ; .....) ; A' (..... ; .....)

B (..... ; .....) ; B' (..... ; .....)

C (..... ; .....) ; C' (..... ; .....)

In generale: A (x; y) il simmetrico A' (.....; .....)

ii) I segmenti.



A (.... ; ....) ; B (.... ; ....); A' (.... ; ....) ; B' (.... ; ....)

$|AB|$ =.....$|A'B'|$ =.....

$p_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = —— $p_{A'B'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = ——

C (.... ; ....) ; D (.... ; ....); C' (.... ; ....) ; D' (.... ; ....)

$|CD|$ =.....$|C'D'|$ =.....

$p_{CD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = —— $p_{C'D'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = ——

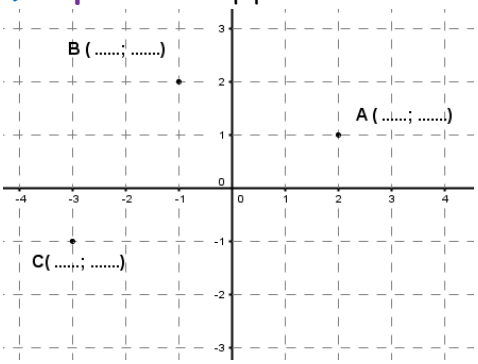
Conclusione:

Misura segmenti :.....

Pendenza segmenti :.....

b) Il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse (Ox).

i) I punti. Rappresenta i simmetrici dei punti A, B e C rispetto ad Ox. Cosa noti?



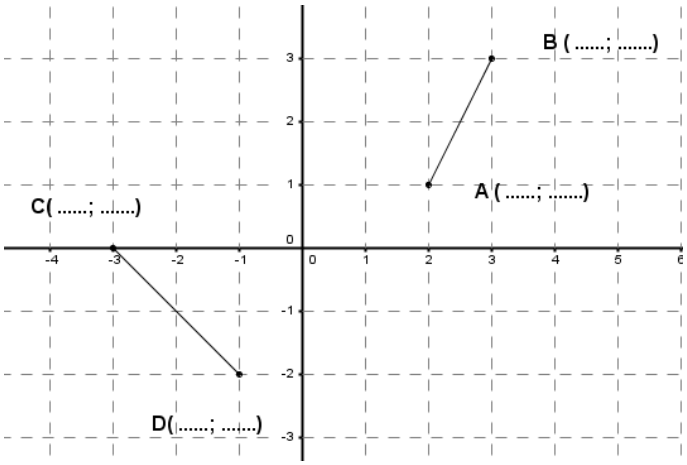
A (..... ; .....) ; A' (..... ; .....)

B (..... ; .....) ; B' (..... ; .....)

C (..... ; .....) ; C' (..... ; .....)

In generale: A (x; y) il simmetrico A' (..... ; .....)

i) I segmenti.



A (.... ; ....) ; B (.... ; ....); A' (.... ; ....) ; B' (.... ; ....)

|AB| =.....|A'B'| =.....

$p_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = —— $p_{A'B'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = ——

C (.... ; ....) ; D (.... ; ....); C' (.... ; ....) ; D' (.... ; ....)

|CD| =.....|C'D'| =.....

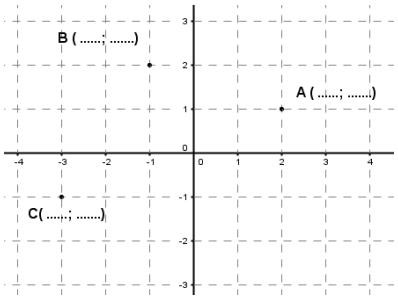
$p_{CD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = —— $p_{C'D'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = ——

Conclusione: Misura segmenti :.....

Pendenza segmenti :.....

b) Il simmetrico rispetto all'origine del piano cartesiano.

i) I punti. Rappresenta i simmetrici dei punti A, B e C rispetto ad O. Cosa noti?



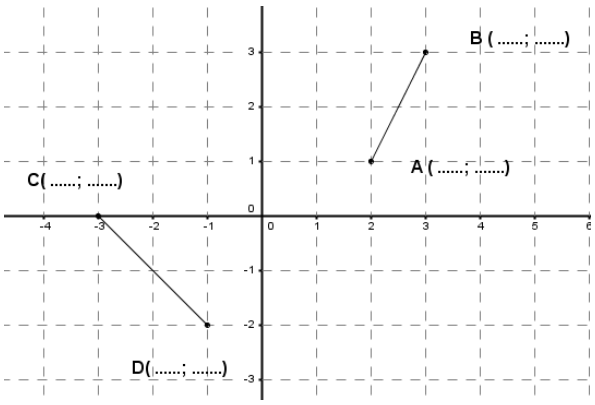
A (..... ; .....) ; A' (..... ; .....)

B (..... ; .....) ; B' (..... ; .....)

C (..... ; .....) ; C' (..... ; .....)

In generale: A (x; y) il simmetrico A' (..... ; .....)

ii) I segmenti:



A (.... ; ....) ; B (.... ; ....); A' (.... ; ....) ; B' (.... ; ....)

|AB| =.....|A'B'| =.....

$p_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = —— $p_{A'B'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = ——

C (.... ; ....) ; D (.... ; ....); C' (.... ; ....) ; D' (.... ; ....)

|CD| =.....|C'D'| =.....

$p_{CD} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = —— $p_{C'D'} = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ ——— = ——

Conclusione: Misura segmenti :.....

Pendenza segmenti :.....

6) Le simmetrie nei grafici d'alcune funzioni reali, data la forma algebrica (equazione).

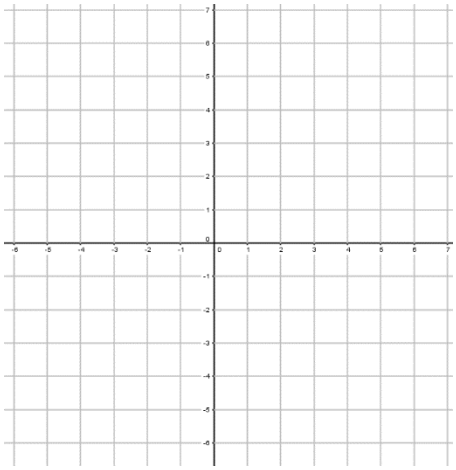
[Caldamente raccomandato l'utilizzo di GeoGebra!]

D'ogni funzione rappresenta la simmetrica rispetto agli assi e al centro, notando le variazioni nella forma algebrica.

a) La funzione costante.

$k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; x \mapsto 4$; che posso scrivere k(x) = 4

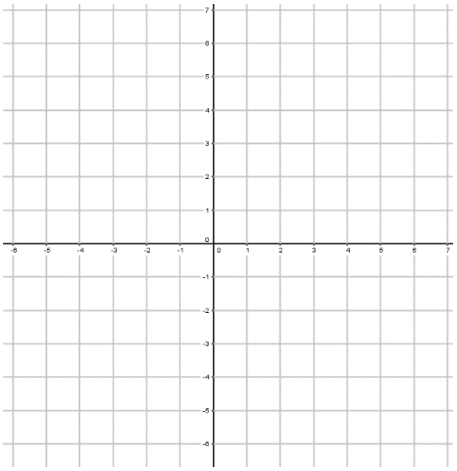
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

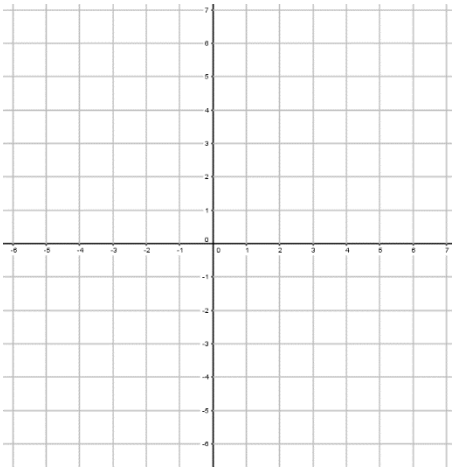
Simmetria Ox.



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine.



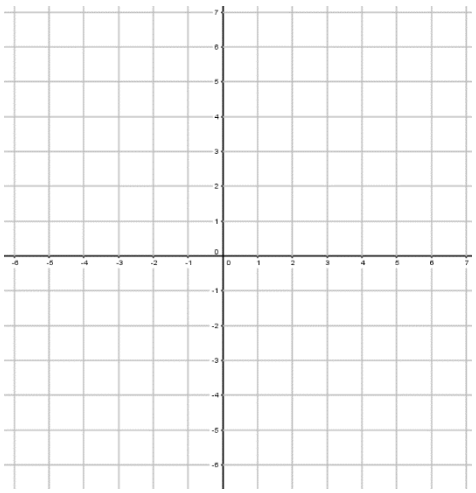
Equazione: .....

Osservazione: .....

b) La funzione identità.

$i_d: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; x \mapsto x$; che posso scrivere i_d (x) = x

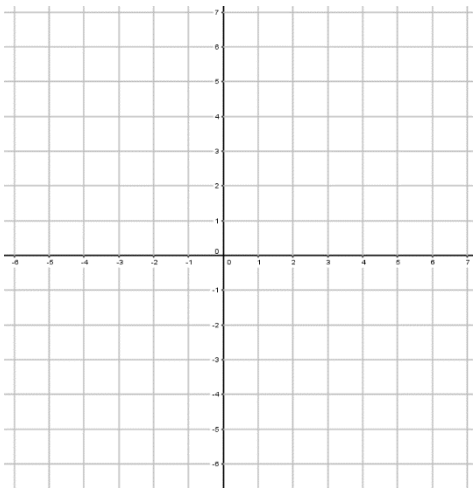
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

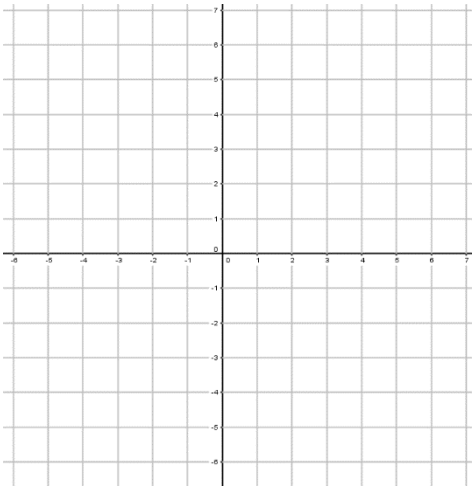
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine.



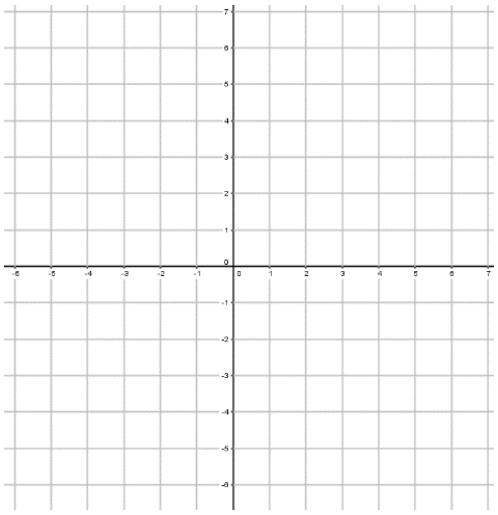
Equazione: .....

Osservazione: .....

c) La funzione quadratica elementare.

$\mathbf{q}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;\; ; \; x \mapsto x^2$; che posso scrivere $q(x) = x^2$

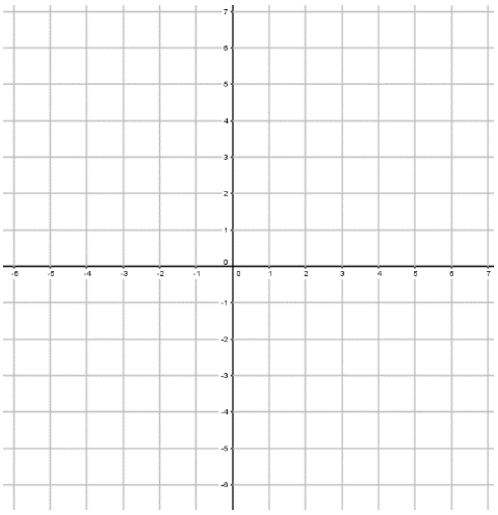
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

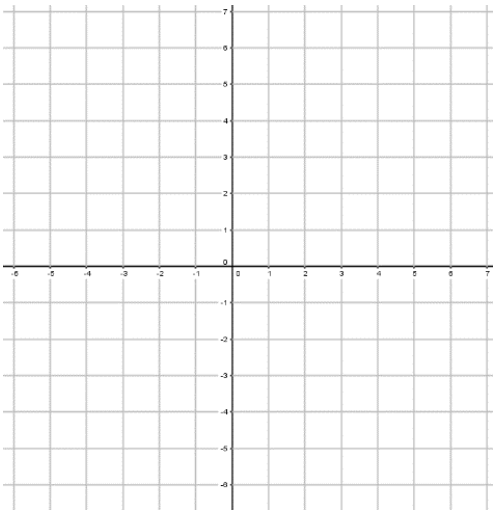
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine



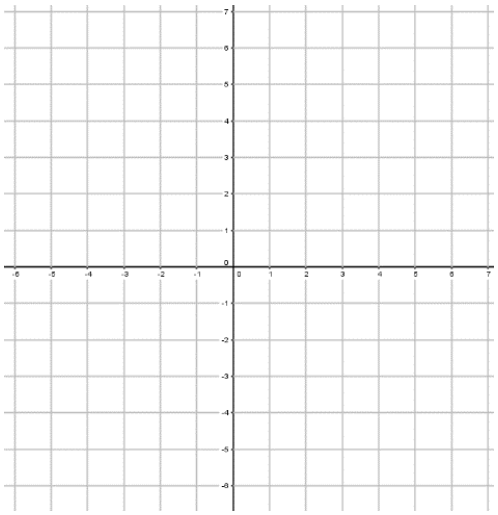
Equazione: .....

Osservazione: .....

d) La funzione radice quadrata.

$\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \;\; ; \; \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\mathbf{x}}$; che posso scrivere $r(x) = \sqrt{x}$

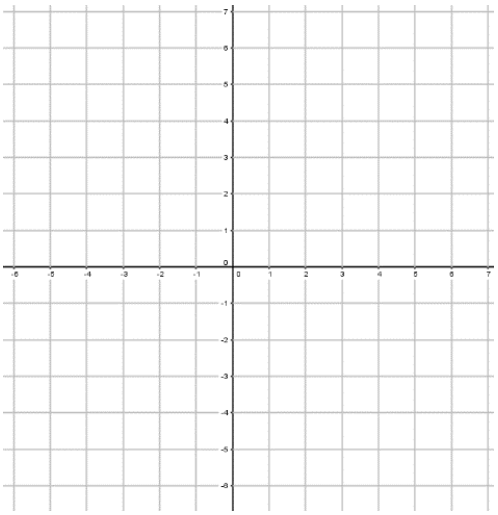
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

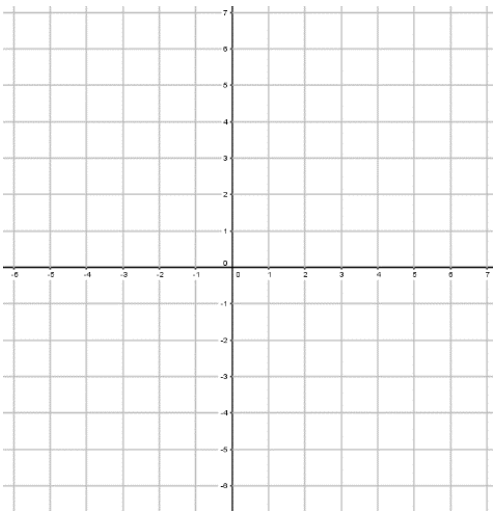
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine



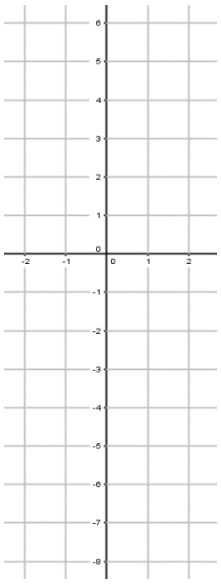
Equazione: .....

Osservazione: .....

e) La funzione cubica elementare.

$w: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^3$;che posso scrivere $w(x) = x^3$

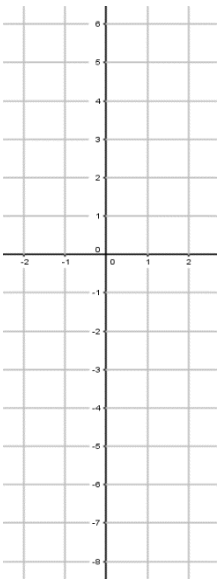
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

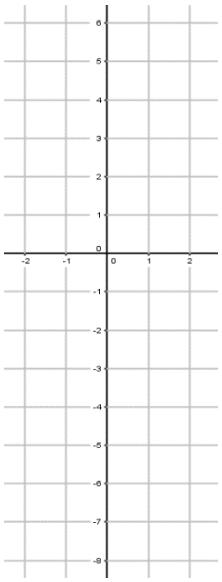
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine



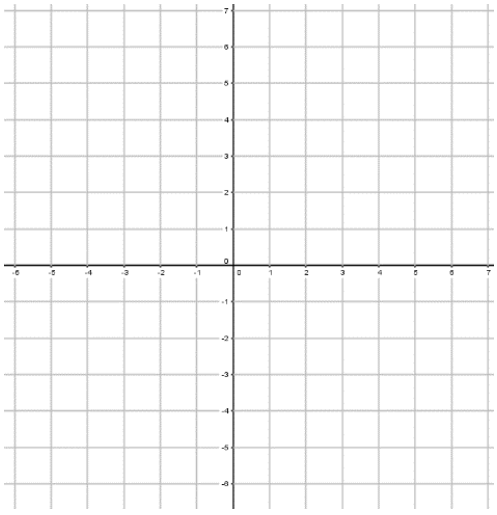
Equazione: .....

Osservazione: .....

f) La funzione iperbolica elementare.

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x}$; che posso scrivere $h(x) = \frac{1}{x}$

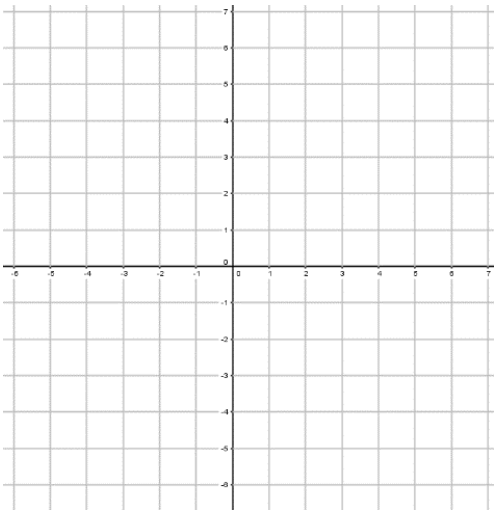
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

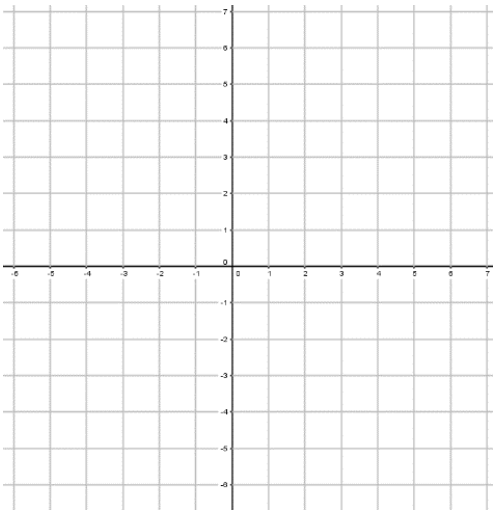
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine



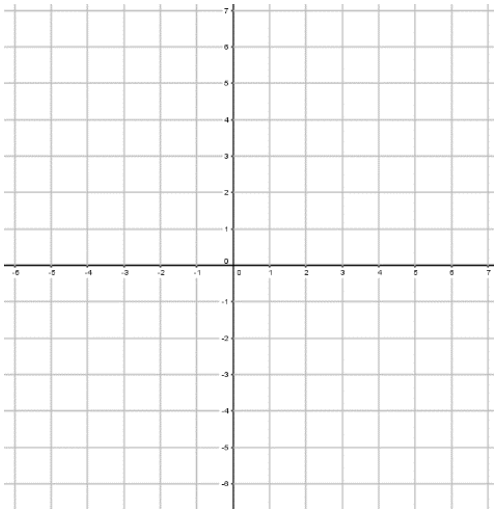
Equazione: .....

Osservazione: .....

g) La funzione valore assoluto.

$\mathbf{v}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto |x|$ che posso scrivere v(x) = $|x|$

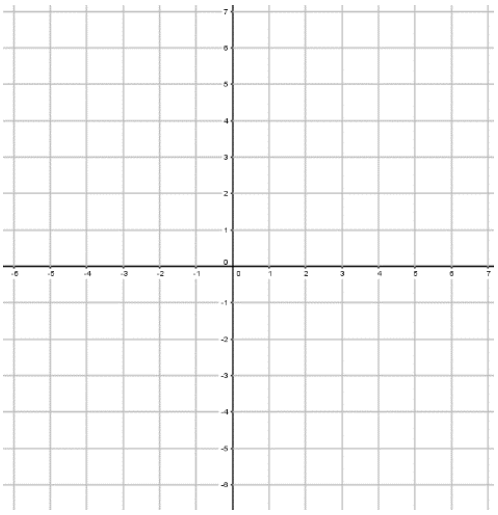
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

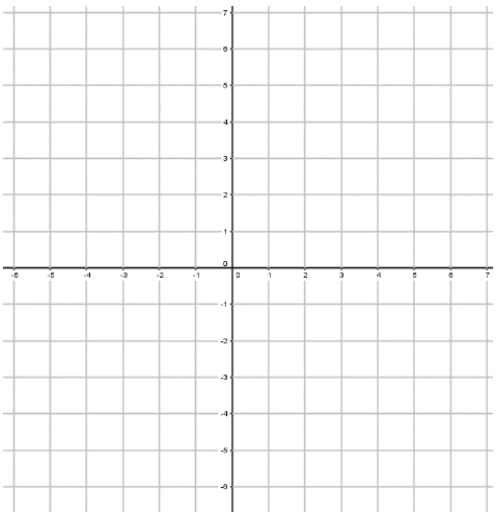
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine



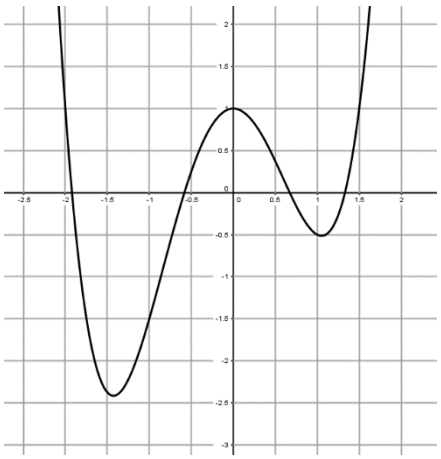
Equazione: .....

Osservazione: .....

Esercizio.

Data la seguente funzione reale: $\mathbf{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 1$, disegnare, nel modo più preciso possibile il grafico delle funzioni simmetriche.

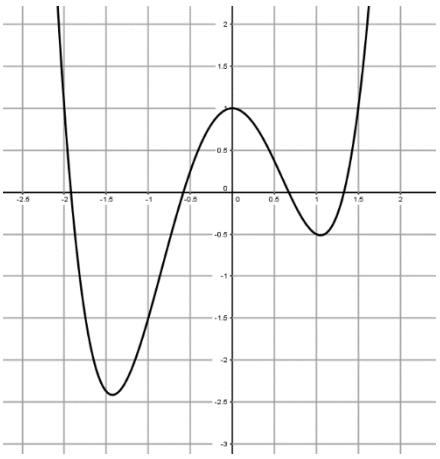
Simmetria Oy.



Equazione: .....

Osservazione: .....

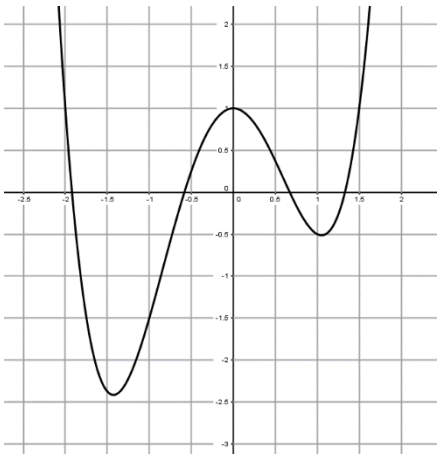
Simmetria Ox



Equazione: .....

Osservazione: .....

Simmetria Origine



Equazione: .....

Osservazione: .....

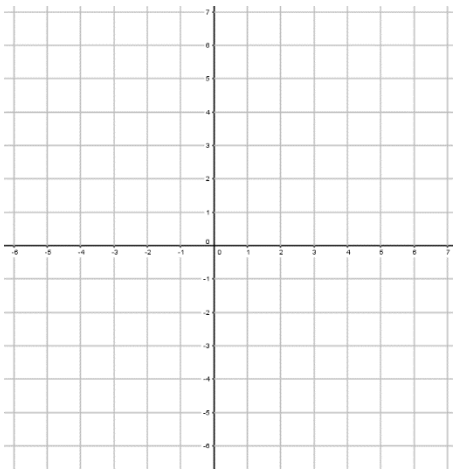
7) La traslazione nei grafici d'alcune funzioni reali, data la sua forma algebrica (equazione).

[Caldamente raccomandato l'utilizzo di GeoGebra!]
D'ogni funzione rappresenta la funzione traslata sia verticalmente che orizzontalmente, notando le variazioni nella forma algebrica.

a) La funzione costante.

$k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto 4$; che posso scrivere k(x) = 4

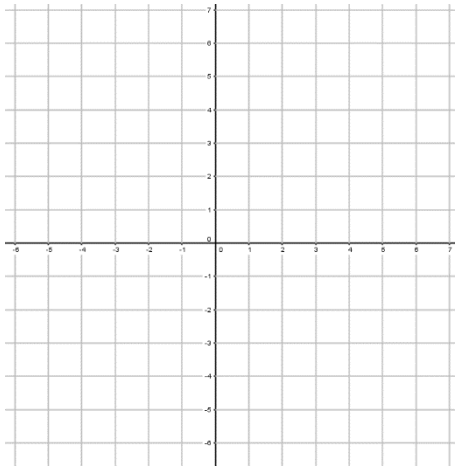
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

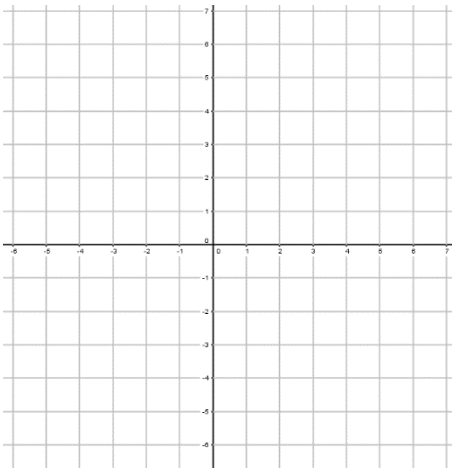
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / Oriz.



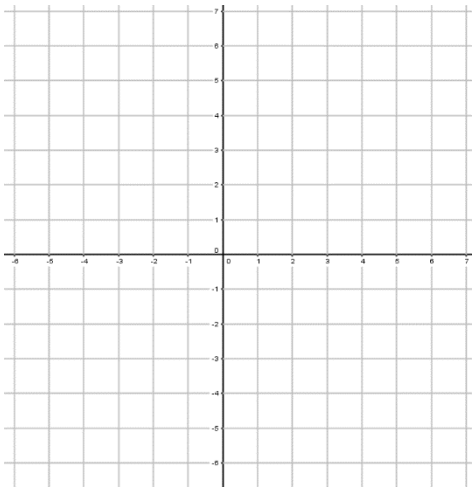
Equazione: .....

Osservazione: .....

b) La funzione identità.

$i_d: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto x$; che posso scrivere i_d (x) = x

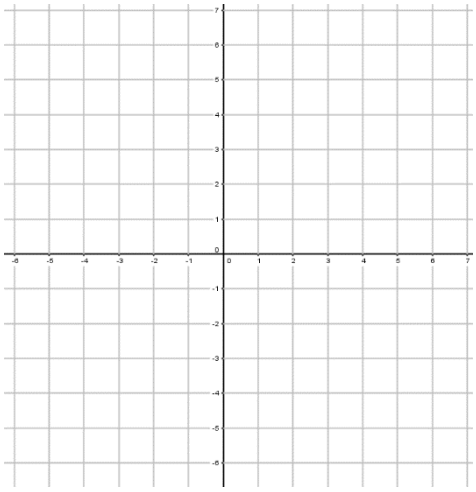
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

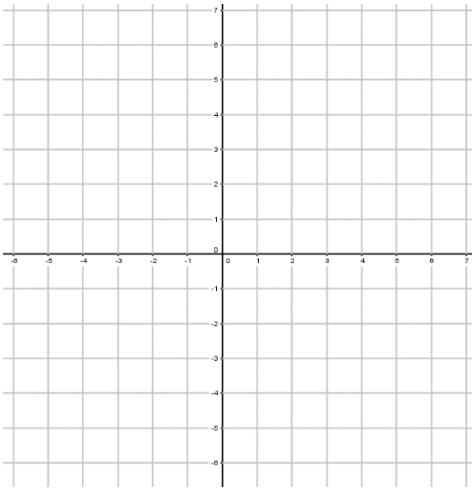
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



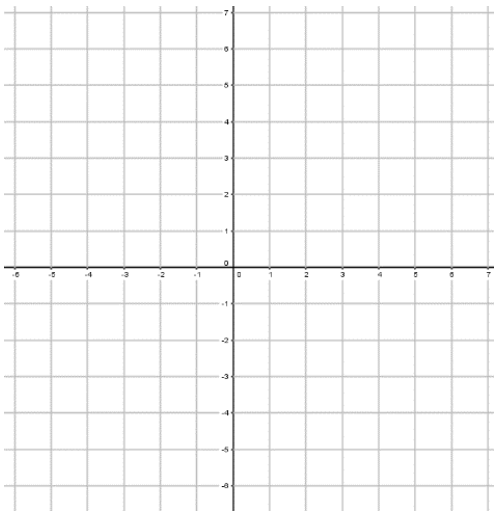
Equazione: .....

Osservazione: .....

c) La funzione quadratica elementare.

$q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto x^2$; che posso scrivere $q(x) = x^2$

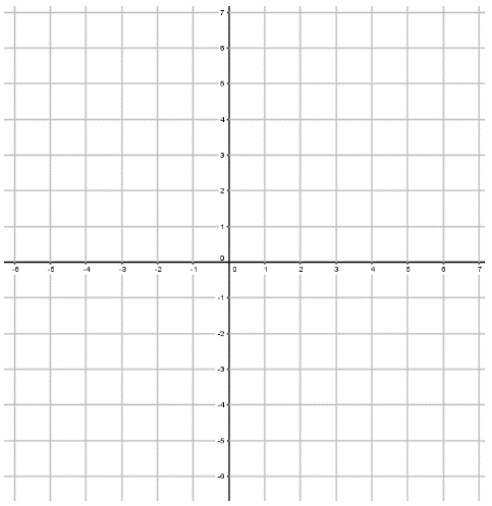
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

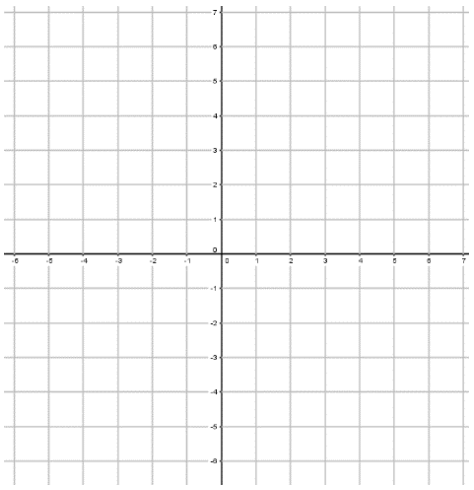
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



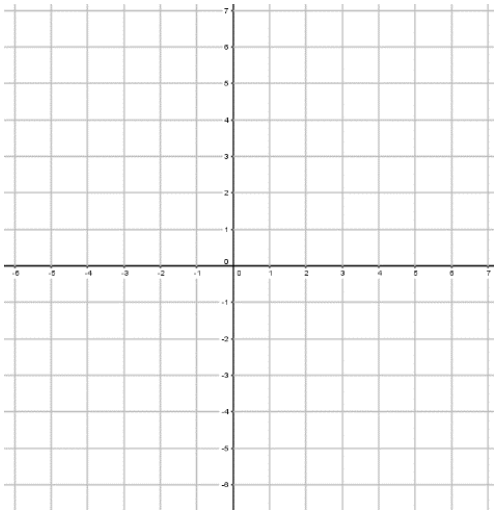
Equazione: .....

Osservazione: .....

d) La funzione radice quadrata.

$r: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto \sqrt{x}$; che posso scrivere $r(x) = \sqrt{x}$

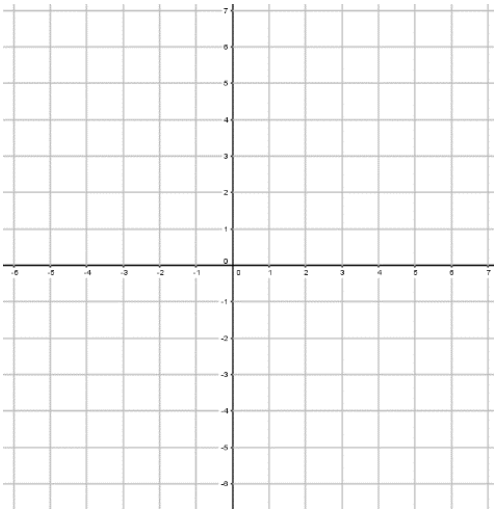
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

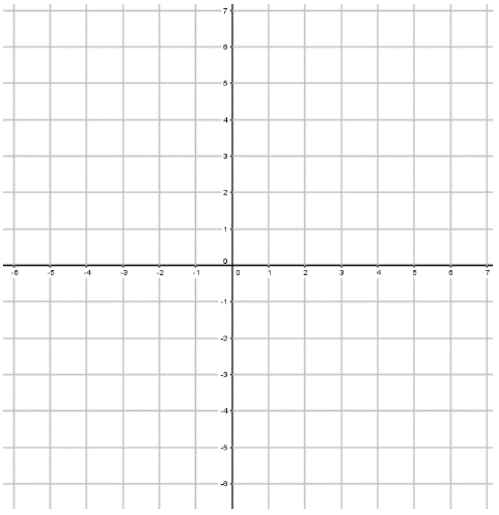
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



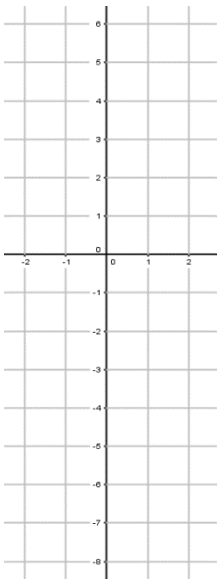
Equazione: .....

Osservazione: .....

e) La funzione cubica elementare.

$\mathbf{w}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^3$;che posso scrivere $w(x) = x^3$

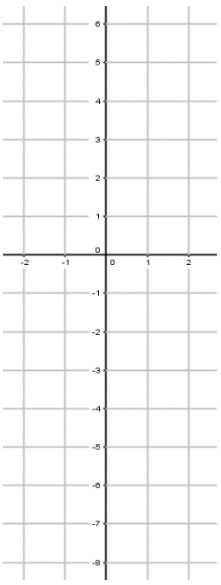
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

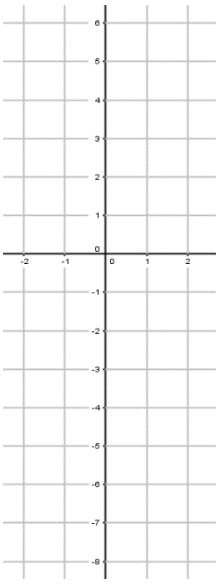
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



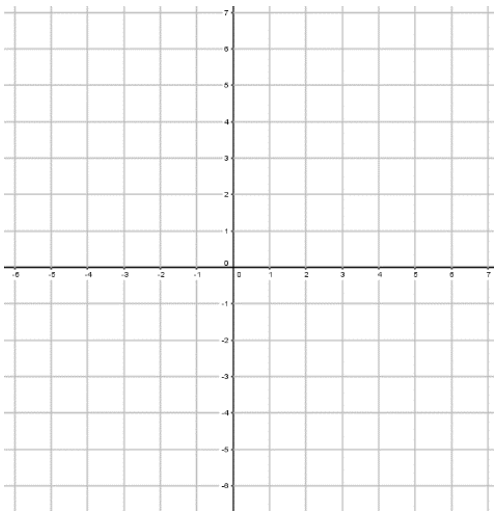
Equazione: .....

Osservazione: .....

f) La funzione iperbolica elementare.

$\mathbf{h}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{1}{x}$; che posso scrivere $h(x) = \frac{1}{x}$

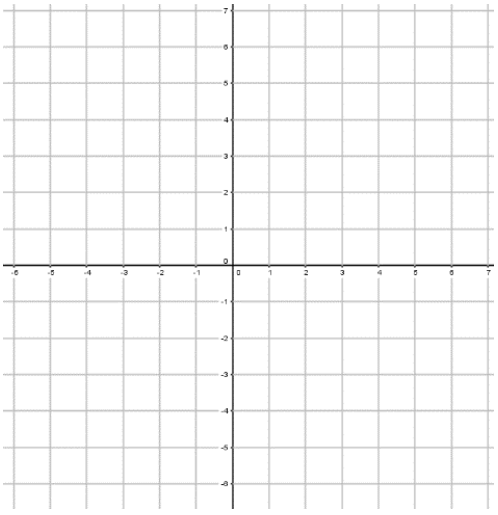
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

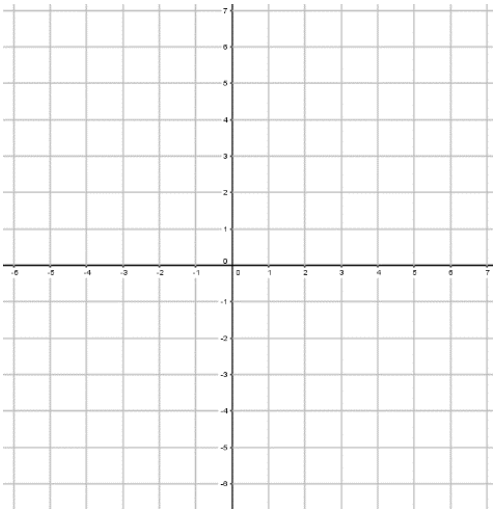
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



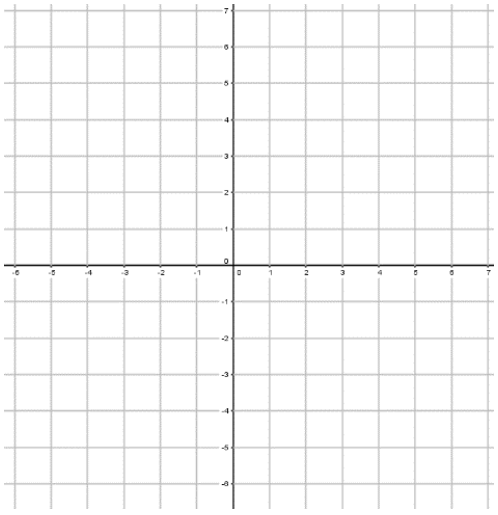
Equazione: .....

Osservazione: .....

g) La funzione valore assoluto.

$v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto |x|$ che posso scrivere v(x) = |x|

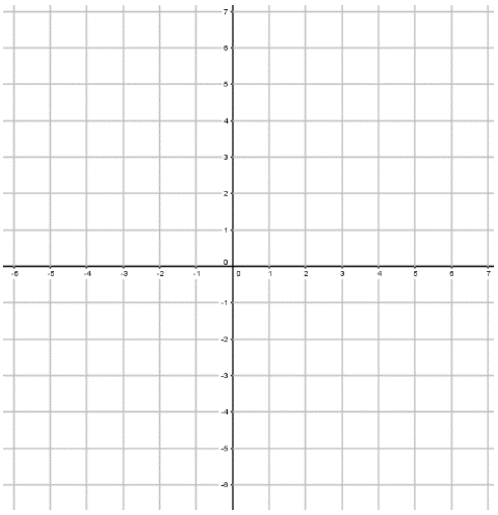
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

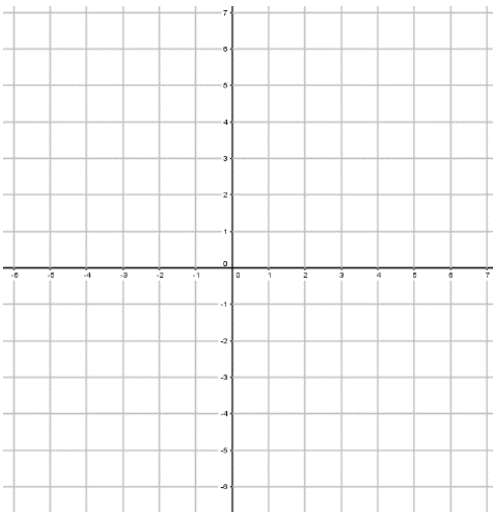
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



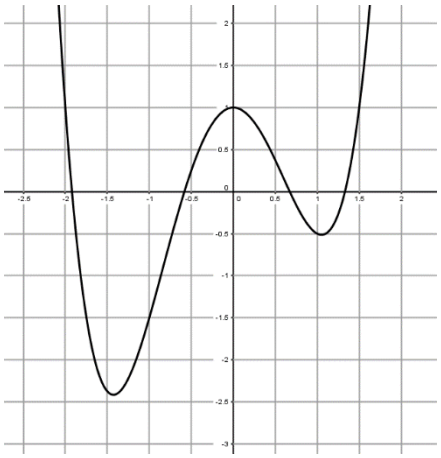
Equazione: .....

Osservazione: .....

Esercizio.

Data la seguente funzione reale: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 1$, disegnare, nel modo più preciso possibile il grafico delle funzioni traslate.

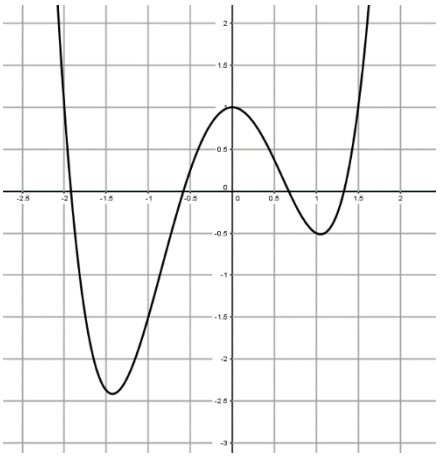
Traslazione verticale



Equazione: .....

Osservazione: .....

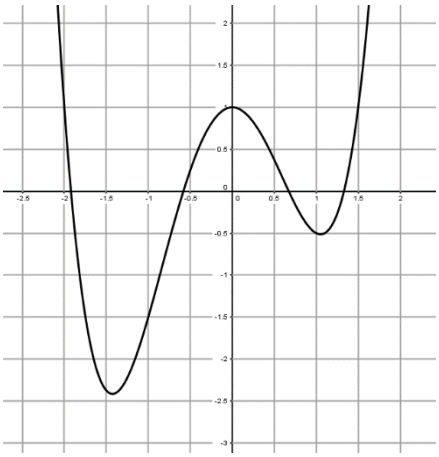
Traslazione orizzontale



Equazione: .....

Osservazione: .....

Traslazione vert. / oriz.



Equazione: .....

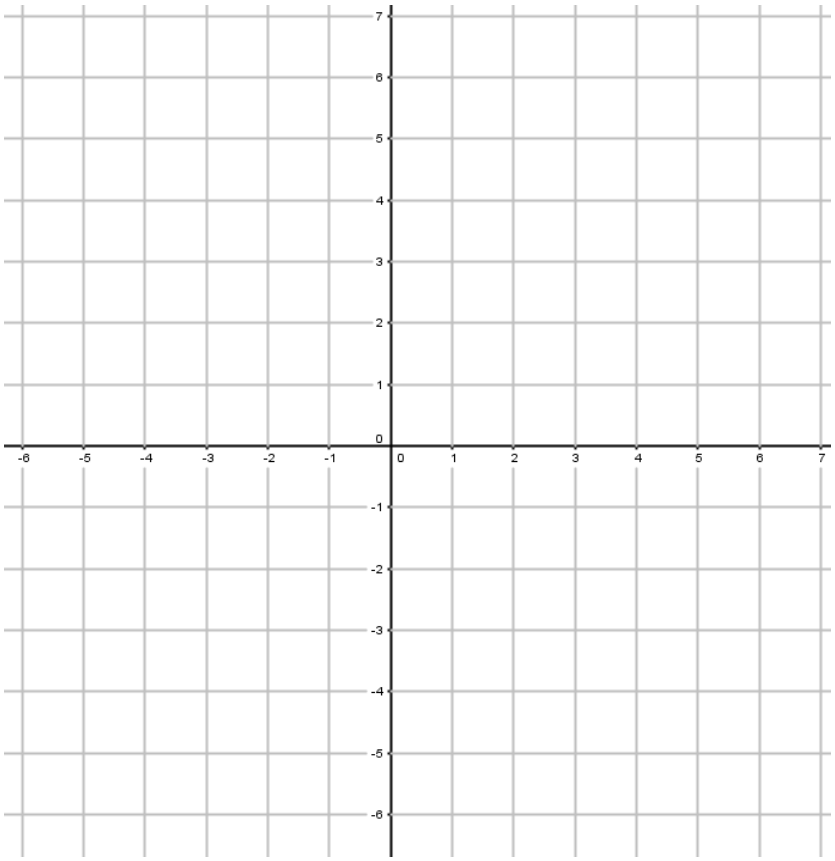
Osservazione: .....

Osservazione: Le rappresentazioni grafiche delle funzioni possono anche essere ruotate ed ottenere di nuovo dei grafici. Non andremo nei dettagli, ma passeremo immediatamente a degli esempi.

8) Esempi.

a) Date le seguenti due funzioni:

$\mathbf{a}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto 2x$ $\quad$ $\mathbf{b}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; x \mapsto 2x + 3$

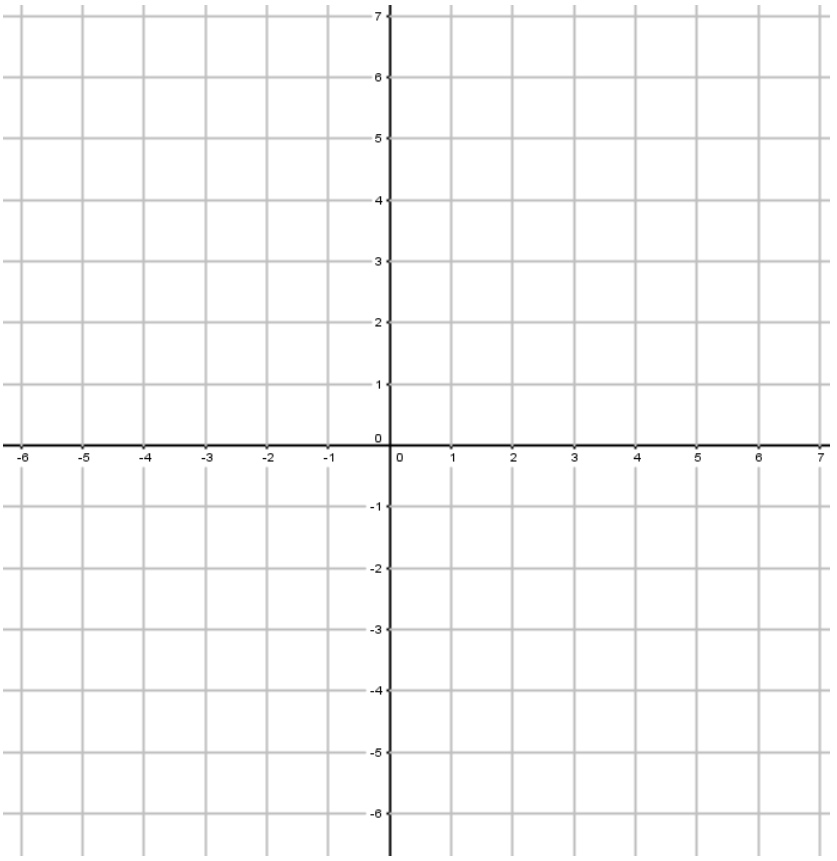


i) Rappresentale sullo stesso grafico.
ii) Cosa noti?
iii) Evidenzia sul grafico per quali valori di x, b(x) > 0 ?
iv) Rappresenta la retta **a'** simmetrica rispetto all'asse delle ordinate della retta **a**. Cosa noti?
v) Rappresenta la retta **a''** simmetrica rispetto all'asse delle ascisse della retta **a**. Cosa noti?
vi) Rappresenta la retta **a'''** simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano della retta **a**. Cosa noti?
vii) Prova a disegnare una retta ottenuta dalla traslazione di a; quale sarà la forma algebrica?

b) Date le seguenti funzioni:

$\mathbf{c}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -2x$

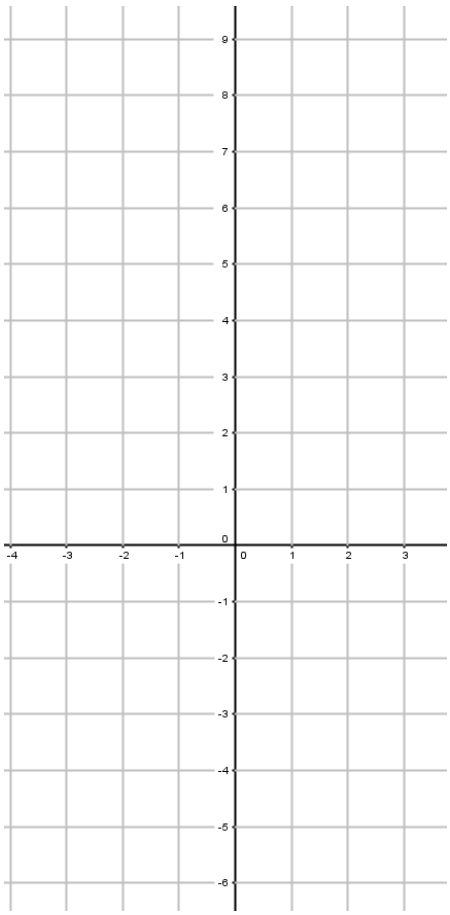
$\mathbf{d}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -2x - 2$



i) Rappresentale sullo stesso grafico.
ii) Cosa noti?
iii) Evidenzia sul grafico per quali valori di x d(x) > 0 ?
iv) Rappresenta la retta **d'** simmetrica rispetto all'asse delle ordinate della retta **d**. Cosa noti?
v) Rappresenta la retta **d''** simmetrica rispetto all'asse delle ascisse della retta **d**. Cosa noti?
vi) Rappresenta la retta **d'''** simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano della retta **d**. Cosa noti?
vii) Prova a disegnare una retta ottenuta dalla traslazione di c; quale sarà la forma algebrica?

c) Date le seguenti funzioni:

e: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -x^2$ f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto -x^2 + 4$



Rappresentale sullo stesso grafico.

i) Cosa noti?

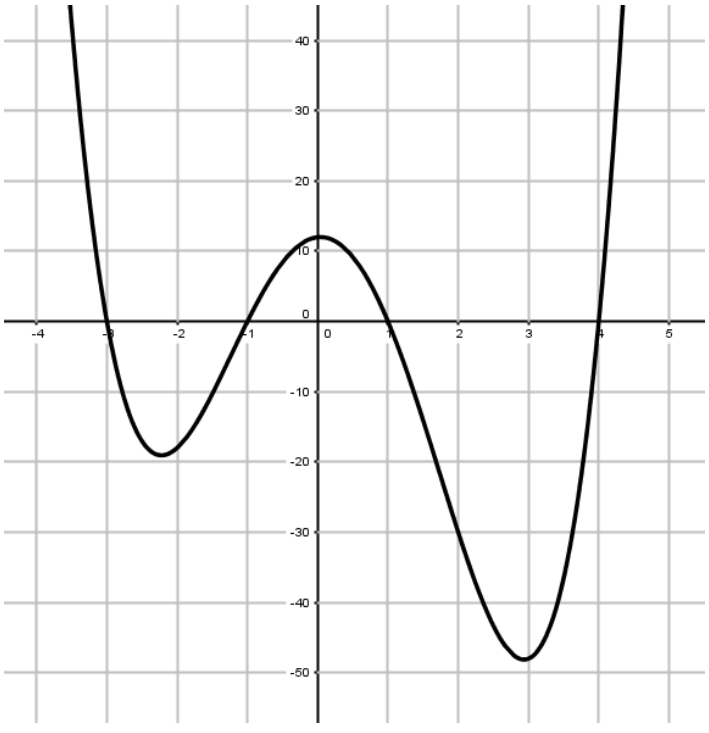
ii) Evidenzia sul grafico per quali valori di x, f(x) > 0 ?

iii) Rappresenta la curva **f'** simmetrica rispetto all'asse delle ordinate della curva **f**. Cosa noti?

iv) Rappresenta la curva **f''** simmetrica rispetto all'asse delle ascisse della curva **f**. Cosa noti?

v) Rappresenta la curva **f'''** simmetrica rispetto all'origine del piano cartesiano della curva **f**. Cosa noti?

d) Data la seguente funzione reale: **f**: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \; x \mapsto x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$, dal grafico determina:



i) Le coordinate dei quattro punti in cui il grafico della funzione f interseca l'asse delle ascisse.

ii) Quante soluzioni avrà l'equazione $x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12 = 0$

iii) Verifica che:

$x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 4$ sono le soluzioni dell'equazione precedente.

iv) Le coordinate del punto in cui il grafico della funzione f interseca l'asse delle ordinate.

v) Stabilire per quali valori di x, f(x) > 0.

vi) Stabilire per quali valori di x, f(x) < 0.

vii) Stabilire per quali valori di x, f(x) = 0.

viii) Ricava il dominio della funzione f(x).

ix) Ricava l'insieme delle immagini della funzione f(x).

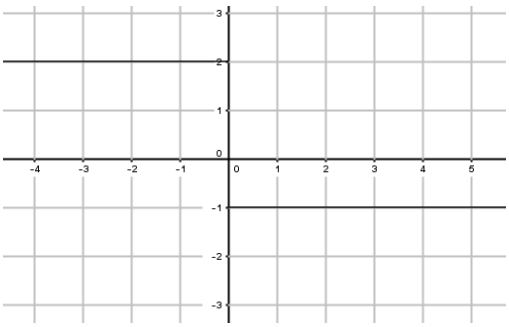
x) Disegna nel modo più preciso possibile il grafico della funzione reale h, sapendo che per tutti gli $x \in \mathbb{R}$, vale che h(x) = f(-x) .

Conclusione - Osservazione:

- Il grafico della funzione **f(-x)** è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate (y) del grafico della funzione f(x).
- Il grafico della funzione **-f(x)** è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse (x) del grafico della funzione f(x).
- Il grafico della funzione **-f(-x)** è simmetrico rispetto all'asse all'origine (O(0;0)) del grafico della funzione f(x).

9) Rappresentazioni grafiche di funzioni definite ad intervalli.

Esempio 1. Osserva la seguente rappresentazione grafica noti che:



a) .....

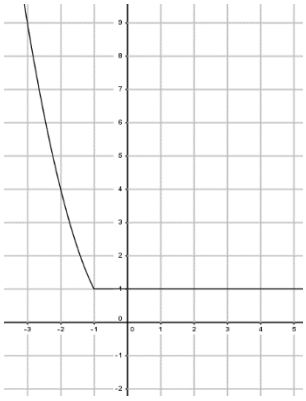
b) .....

c) Dunque, possiamo definirla nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$$

d) Determina l'insieme di partenza, il dominio, l'insieme d'arrivo e l'insieme delle immagini della funzione.

Esempio 2. Prova a definire la forma algebrica funzione rappresentata dal seguente grafico. Determina, inseguito, l'insieme di partenza, il dominio, l'insieme d'arrivo e l'insieme delle immagini della funzione.



.....

.....

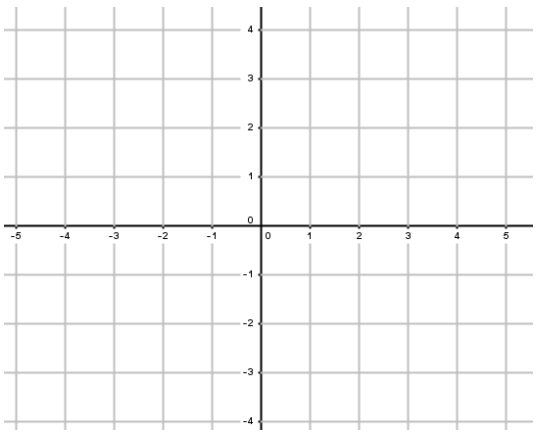
Insieme di partenza: .....

Domini: .....

Insieme d'arrivo: .....

Insieme delle immagini: .....

Esempio 3. Disegnare il grafico della funzione reale m(x) definita nel seguente modo:



$$\begin{cases} x+4: & x < -2 \\ 2: & -2 \leq x < 2 \\ -x+4: & x \geq 2 \end{cases}$$ Determina inseguito:

Insieme di partenza:.....

Dominio:.....

Insieme d'arrivo:.....

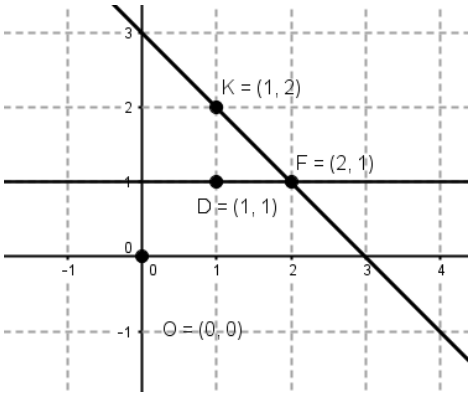
Insieme delle immagini: .....

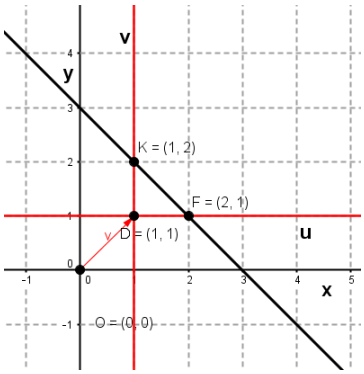
Esempio 4: Inventa una funzione definita ad intervalli e rappresentala sul piano cartesiano.

10) Lo spostamento degli assi cartesiani.

Ti ricorderai sicuramente quanto visto l'anno scorso sul BM3 a pag. 16 es. 3

Traslando il riferimento Oxy in quello Duv quale saranno le coordinate dei punti D; F e K? Cosa puoi dire della forma algebrica delle due rette?





Osservazione:

.....

.....

11) Calcolare l'immagine dato l'argomento. BM4 pag.143 es. 8 – 9; pag. 144 es.11

Date le seguenti funzioni reali:

$f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto -2x^2$ $h: x \mapsto \frac{2x}{x+1}$; $k: x \mapsto \sqrt{x}$; $c: x \mapsto x^3$

Calcola, quando è possibile, l'immagine secondo i seguenti argomenti:

f(2) = ...; g(-1) = ...; h(-1) = ...;

$h\left(-\frac{1}{2}\right)$ = ...; $k(-1)$ = ...; $c(3^{-1})$ = ...;

12) Calcolare l'argomento data l'immagine.

Date le funzioni del es. 11, calcola, quando è possibile, l'argomento che possiede le seguenti immagini.

f(a) = 2 : .....

g(a) = -1: .....

h (b) = $-\frac{1}{2}$: .....

k (c) = $\frac{3}{4}$: .....

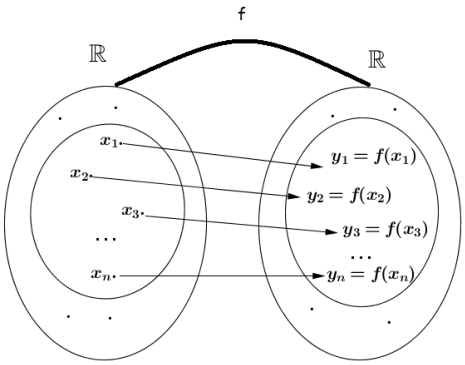
k (d) = $-\frac{1}{2}$: .....

c(m) = $-\frac{1}{2}$: .....

13) L'insieme di definizione della funzione Df - dominio della funzione.

BM4 pag.144 es. 10

Ricorda il l'insieme di definizione (o dominio) d'una funzione f è l'insieme formato dagli elementi dell'insieme di partenza che hanno una immagine.



Insieme di partenza :.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Osservazione: .....

.....

Insieme d'arrivo: .....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Osservazione:

.....

Esempi:

$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ ,\ x \longmapsto 10 - x$; D_a: .....

$b: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ,\ x \longmapsto 10 - x$; D_b: .....

$c: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\ ,\ x \longmapsto \frac{x}{2}$; D_c: .....

$d: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}\ ,\ x \longmapsto \frac{x}{2}$; D_d: .....

$e: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\ ,\ x \longmapsto \frac{10}{x}$; D_e: .....

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\ ,\ x \longmapsto \frac{2}{x+3}$; D_f: .....

$g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\ ,\ x \longmapsto \frac{2-x}{x+3}$; D_g: .....

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{2}{x^2+3x}$; D_h: .....

$i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{2}{x^2+3}$; D_i: .....

$l: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{2}{x^2+3x+2}$; D_l: .....

$m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \sqrt{x+3}$; D_m: .....

$n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{\sqrt{x+3}}{x}$; D_n: .....

$o: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ D_o: .....

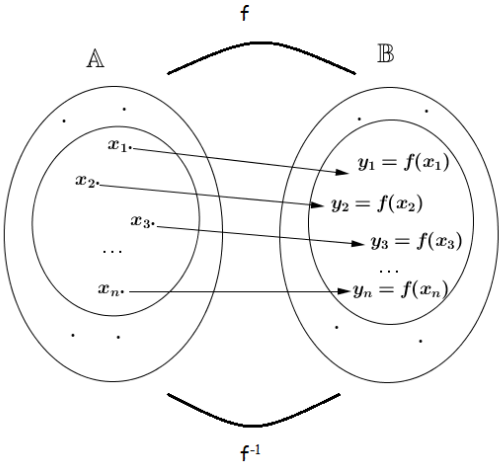
$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+3}}$ D_p: .....

14) L'insieme delle immagini Imf – Codominio della funzione.

Ricorda l'insieme delle immagini (o codominio) d'una funzione f è l'insieme formato dagli elementi dell'insieme d'arrivo che sono immagini.

a) La funzione inversa.

Per calcolare l'insieme delle immagini d'una funzione f, devo prendere in considerazione la funzione che ha quale insieme di Partenza B e come insieme d'arrivo A, detta **Funzione inversa f^{-1},** e determinarne il dominio.

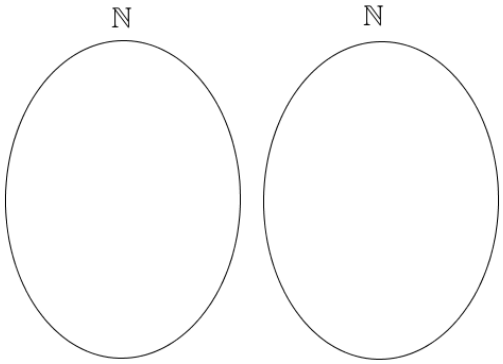


b) Come calcolo la funzione inversa f^{-1}?

Per calcolare la funzione inversa devo risolvere la forma algebrica della funzione rispetto ad x, e scambiare le due variabili.

Esempio 1:

a: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto y = 2x$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa a^{-1}:

.....

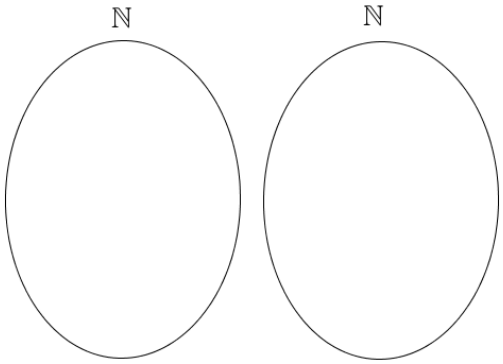
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 2:

b: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto y = 2x - 1$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa b^{-1}: .....

.....

.....

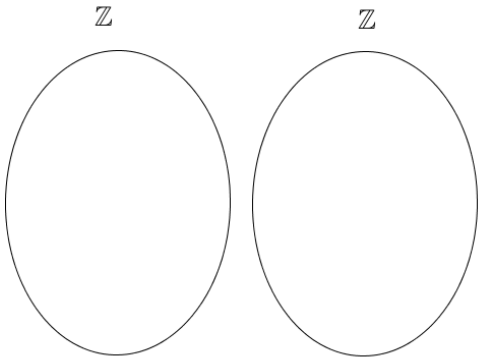
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 3:

c: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto y = \frac{x-1}{2}$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa c^{-1}: .....

.....

.....

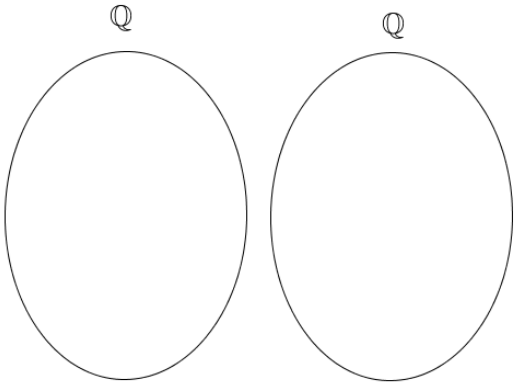
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 4:

d: $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto y = \frac{1}{x}$



Insieme di partenza: .....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa d^{-1}:

.....

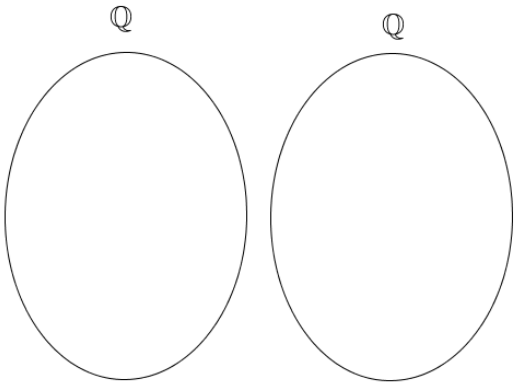
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 5:

e: $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, x \longmapsto y = \frac{1}{x+1}$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa e^{-1}:

.....

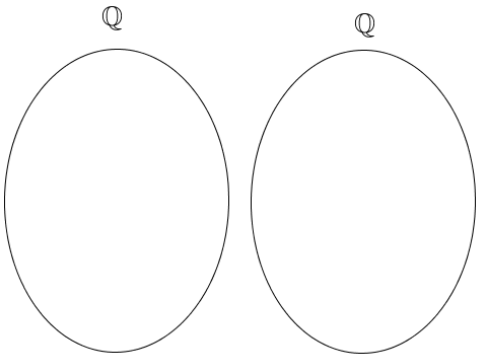
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 6:

f: $\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,, x \mapsto y = \frac{2x+1}{x+1}$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa f^{-1}:

.....

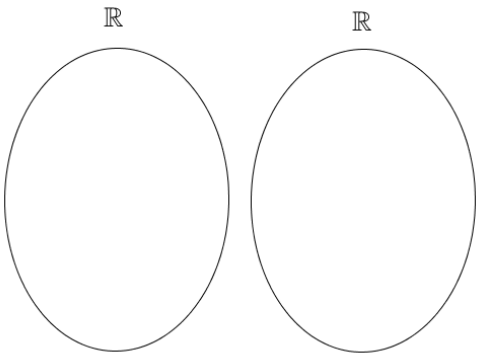
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 7:

g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, x \mapsto y = x^2$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{f(x)}$= .....

Funzione inversa g^{-1}:

.....

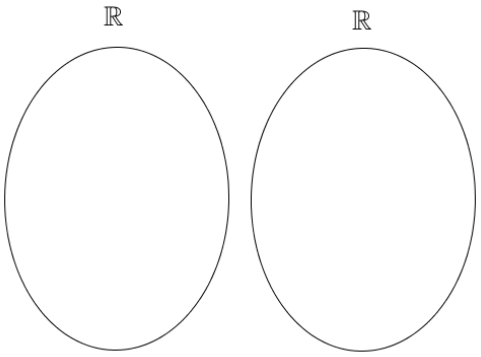
.....

Insieme d'arrivo:.....

Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Esempio 8:

h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, x \mapsto y = x^3$



Insieme di partenza:.....

Dominio – $D_{h(x)}$= .....

Funzione inversa h^{-1}:

.....

.....

Insieme d'arrivo:.....

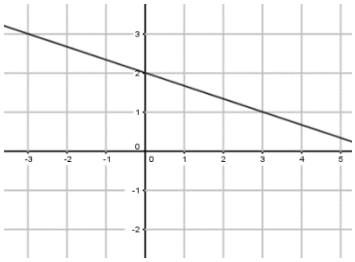
Insieme delle immagini – $Im_{f(x)}$= .....

Osservazione: Chiaramente gli elementi esclusi dall'insieme delle immagini, sul grafico della funzione .....

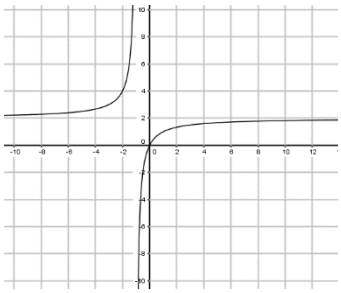
.....

c) Come leggere l'insieme delle immagini sul grafico della funzione?

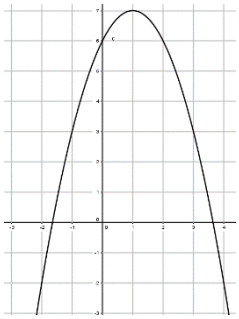
Date le seguenti funzioni determina dal grafico l'insieme delle immagini.



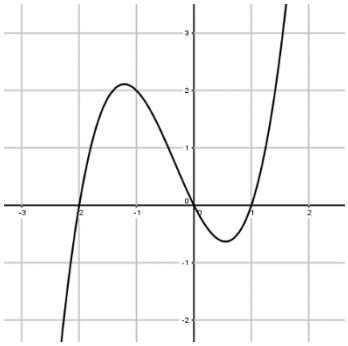
Im = ...



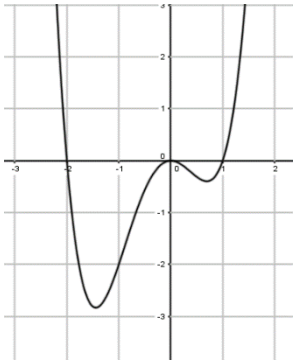
Im = ...



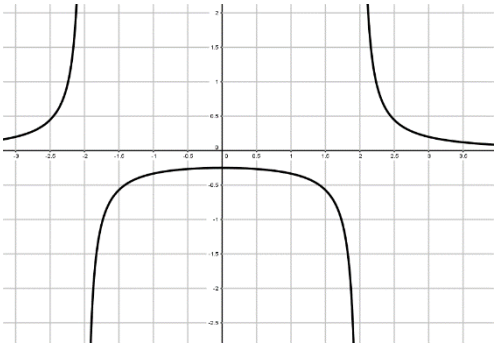
.Im = ...



Im = ...



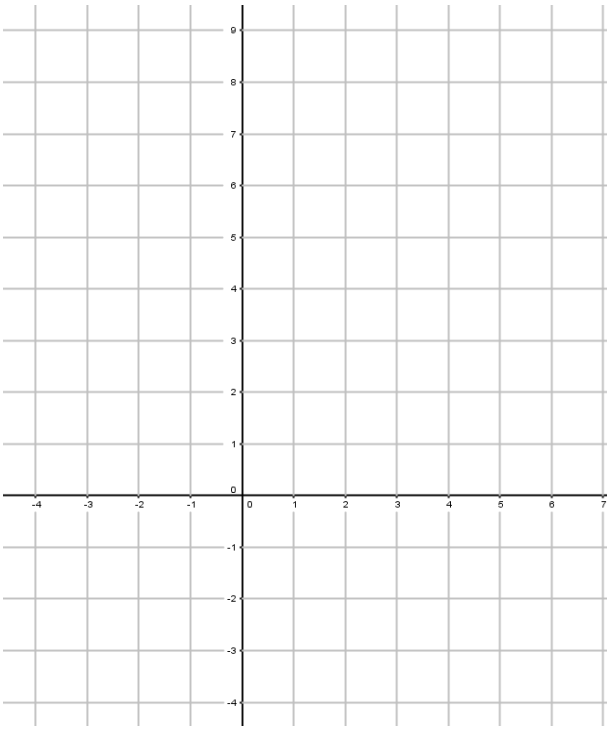
Im = ...



Im = ...

d) Relazione tra il grafico d'una funzione e della sua inversa.

Date le funzioni reali. **h :** $x \mapsto y = 2x$ e **q:** $x \mapsto y = x^2$ dopo aver determinato la loro inversa, rappresentale sul piano cartesiano. Cosa noti?



.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

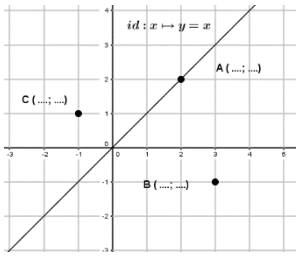
15) Condizione d'appartenenza d'un punto al grafico d'una funzione.

BM4 pag.144 es. 12 – 13.

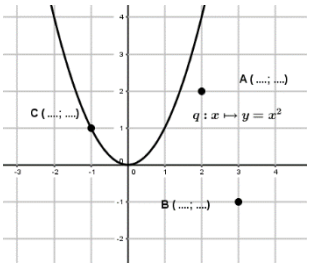
Possiamo verificare la condizione d'appartenenza in due modi:

a) Graficamente, sul piano cartesiano.

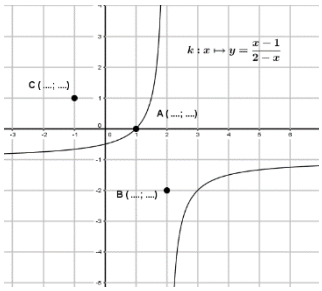
i)



ii)



iii)



…… …… ……

b) Algebricamente, con il calcolo.

Possiamo verificare con il calcolo se un punto appartiene ad una funzione, sostituendo le coordinate nella forma algebrica: se l'uguaglianza è valida il punto appartiene, nel caso contrario non appartiene.

……
……
……

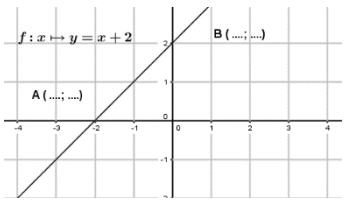
16) Intersezione del grafico d'una funzione con gli assi cartesiani. BM4 pag.145.

Devo determinare i punti d'intersezione sia con l'asse delle ascisse (x) che con quello delle ordinate (y) , chiaramente se esistono.

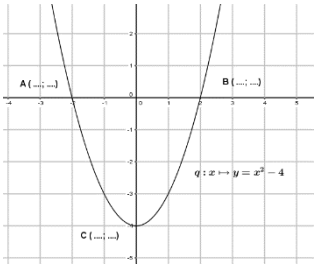
Possiamo verificare la condizione d'intersezione in due modi:

a) Graficamente, sul piano cartesiano.

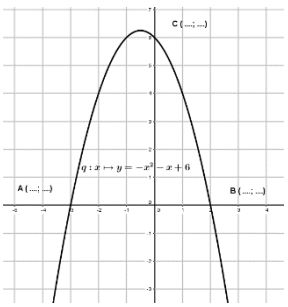
i)



ii)

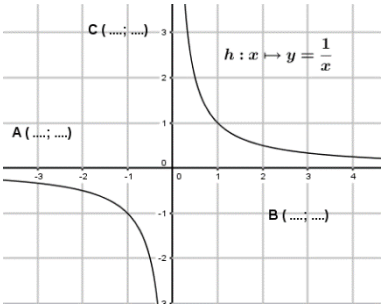


iii)

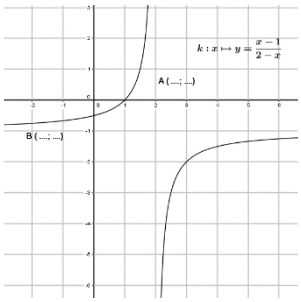


…… …… ……

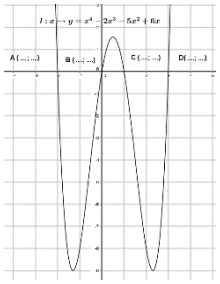
iv)



v)



vi)



…… …… ……

Conclusione: ……

b) Algebricamente, con il calcolo.

Possiamo verificare con il calcolo le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi, nel seguente modo:

Intersezione con l'asse delle ascisse, vuol dire che il valore dell'ordinata y = ... dunque, basterà sostituire al posto della ..... il valore .....

i) .....

ii) .....

iii) .....

iv) .....

v) .....

vi) .....

Intersezione con l'asse delle ordinate, vuol dire che il valore dell'ascissa x = ... dunque basterà sostituire al posto della ..... il valore .....

i) .....

ii) .....

iii) .....

iv) .....

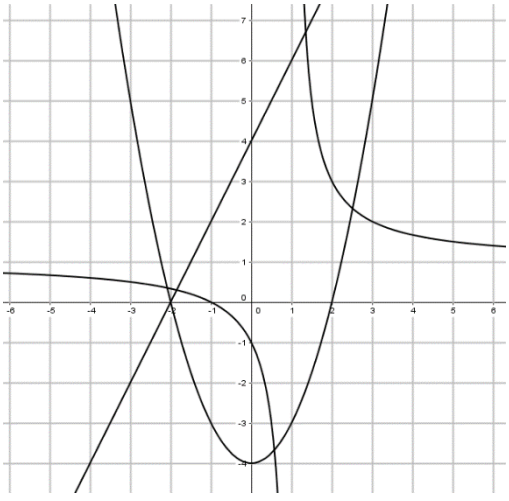
v) .....

vi) .....

Esercizio.

Date le seguenti funzioni reali

a: $x \mapsto y = 2x + 4$; **b:** $x \mapsto y = x^2 - 4$; **q:** $x \mapsto y = \frac{x+1}{x-1}$



a) Collega la forma algebrica alla rispettiva rappresentazione grafica.

b) Stabilire, graficamente e algebricamente, a quali grafici delle funzioni date il punto A (-2;0) appartiene.

c) Calcola l'immagine $\sqrt{2}$ rispetto alle tre funzioni.

d) È vero che nessun grafico delle funzioni passa per l'origine? Verificalo graficamente e algebricamente.

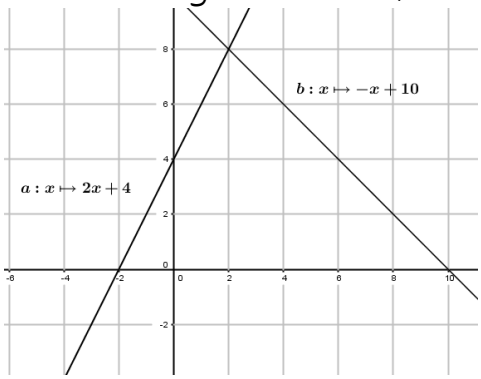
e) Metti in risalto e calcola i punti d'intersezione dei grafici delle funzioni con l'asse delle ascisse.

f) Metti in risalto e calcola i punti d'intersezione dei grafici delle funzioni con l'asse delle ordinate.

17) Punti d'intersezione tra i grafici di due o più funzioni. BM4 pag. 145 es 16-17- pag. 153 es. 38

Risoluzione grafica d'equazioni.

Risolviamo anche questo problema sia dal punto di vista grafico che algebrico. Vediamo alcuni esempi, che chiaramente rappresenterai sul tuo foglio.



a) Date le funzioni reali: $a: x \mapsto 2x + 4$; $b: x \mapsto -x + 10$, determina il punto d'intersezione dei due grafici.

i) Soluzione grafica: $a \cap b = \{P\}$. P = ...

ii) Soluzione algebrica:

L'intersezione è data dalla risoluzione del sistema ottenuto dalla forma algebrica delle due funzioni, nel nostro caso:

$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -x + 10 \end{cases}$ che risolvete tranquillamente.

.....

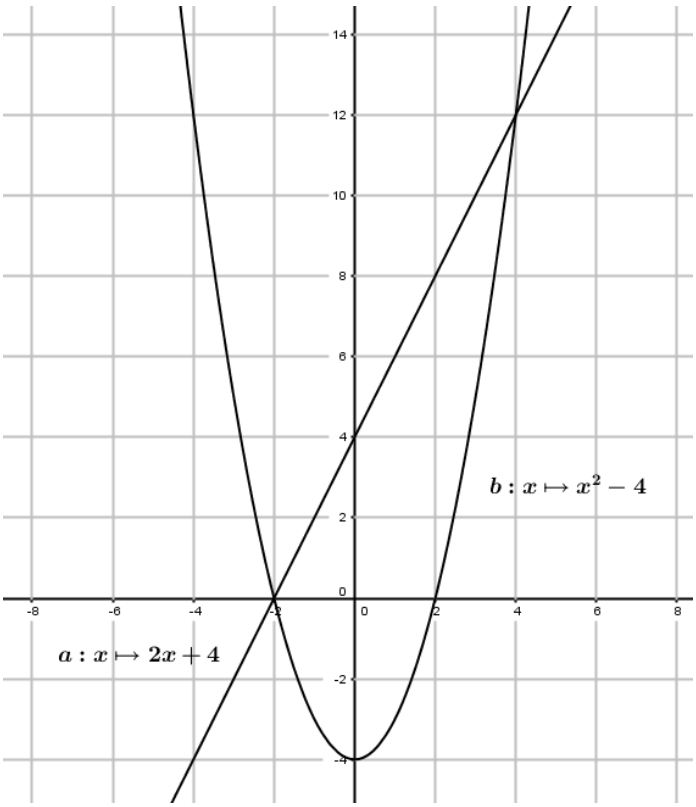
.....

.....

Applicazione.

Siano A e B i punti d'intersezione del grafico delle due rette con l'asse delle ascisse, calcolare il perimetro e l'area del triangolo ABP.

b) Date le funzioni reali: $a: x \mapsto 2x + 4$; $b: x \mapsto x^2 - 4$, determina i punti d'intersezione dei due grafici.



i) Soluzione grafica: $a \cap b = \{P; Q\}$.

P = ... ; Q = ...

ii) Soluzione algebrica:

L'intersezione è data dalla risoluzione del sistema ottenuto dalla forma algebrica delle due funzioni, nel nostro caso:

$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$ che risolvete tranquillamente.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) Date le funzioni reali: $a: x \mapsto -x^2 + 2x + 8$; $b: x \mapsto x^2 - 4$:

i) Rappresenta i grafi delle due funzioni sul piano cartesiano.

ii) Determina i punti d'intersezione dei due grafici, sia geometricamente che algebricamente.

18) Funzione lineare – funzioni affini.

BM4 pag. 70 – 71; Esercizi 18 – 35, pag. 145 - 151

a) La funzione lineare.

La **funzione lineare** è una funzione reale del tipo:

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; x \mapsto y = ax$; scritta sotto **forma esplicita** (che utilizzeremo)

oppure $x \mapsto ax + by = 0$ sotto **forma implicita;**

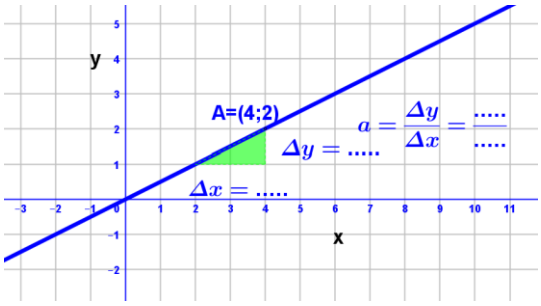
la cui rappresentazione grafica è una retta passante **per l'origine** O (0;0) e dove il coefficiente **a** rappresenta **la pendenza** della retta.

Esempio:

Determina la forma algebrica (equazione) d'una funzione lineare passante per il punto A (4;2).

Abbiamo i seguenti possibili modi.

I) Dedurre la forma algebrica **dal grafico**, determinando dapprima la pendenza.



Pendenza: .....

Equazione sotto forma esplicita:

.....

Equazione sotto forma implicita:

.....

II) Calcolando la forma algebrica.

Sapendo che una funzione lineare passa sempre per l'origine, mi bastano le coordinate d'un punto appartenete alla stessa per determinare la pendenza e di conseguenza la formula algebrica. Nel nostro caso abbiamo:

Pendenza: .....

Equazione sotto forma esplicita: .....

Equazione sotto forma implicita: .....

Esempi.

Dati i punti: A(-2;1) ; B (2; -3) ; C (3; 2)

i) Determina la forma algebrica d'una funzione lineare passante per il relativo punto.

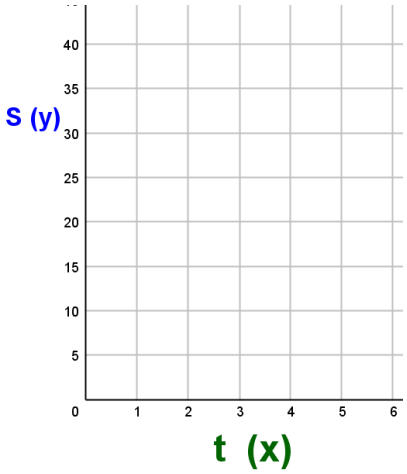
ii) Qual è la pendenza d'ogni retta?

iii) Rappresenta i rispettivi grafici sul piano cartesiano. Cosa noti?

La proporzionalità diretta – grandezze direttamente proporzionali.

Esempio 1:

Un pedone viaggia alla velocità media di 10 km/h; determina, dopo aver compilato la tabella, la funzione che collega lo spazio percorso al tempo. Che tipo di grandezze sono?



.....

.....

.....

.....

.....

Conclusione: Due grandezze sono **direttamente** ..... se la loro rappresentazione è data dal grafico d'una ..... lineare e il loro **rapporto** costante; nel nostro caso:

.....

.....

.....

Esempio 2

Considera un triangolo equilatero di lato **l** e il relativo perimetro **P**. Determina e rappresenta la funzione che collega il perimetro **P** del triangolo al variare del lato **l**. Di che tipo di grandezze si tratta? Puoi dire la stessa cosa dell'area?

Esempio 3

Considera un esagono regolare di lato **l** e il relativo perimetro **P**. Determina e rappresenta la funzione che collega il perimetro **P** dell'esagono al variare del lato **l**. Di che tipo di grandezze si tratta? Puoi dire la stessa cosa dell'area?

Esempio 4

Considera un cubo di spigolo **s**, come varia l'**area** totale e il **volume** del cubo al variare dello spigolo? Si tratta di grandezze direttamente proporzionali? Perché?

Esempio 5

Una palazzina è composta da 4 appartamenti, rispettivamente di 180 m2, 120 m2, 100 m2 e 200 m2. Per una spesa di manutenzione straordinaria di 6000 CHF, quanto deve versare ogni proprietario, considerando che ogni quota è direttamente proporzionale alla metratura dell'appartamento?

b) La funzione affine.

La funzione **affine** è una funzione reale del tipo:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ; x \mapsto y = ax + b$; scritta sotto **forma esplicita** (che utilizzeremo) oppure $x \mapsto mx + ny + k = 0$ sotto **forma implicita;**

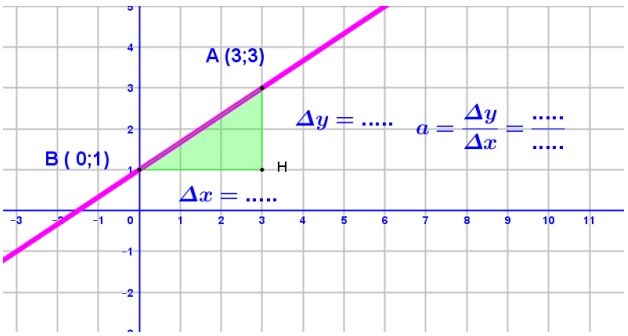
la cui rappresentazione grafica è una retta passante **per l'ordinata all'origine** (0;**b**) e dove il coefficiente **a** rappresenta **la pendenza** della retta.

Esempio:

Determina la forma algebrica (equazione) d'una funzione affine passante per il punto A (3;3) e B (0;1)

Abbiamo i seguenti possibili modi.

I) Dedurre la forma algebrica dal grafico, determinando dapprima l'ordinata all'origine ed inseguito la pendenza della retta.



Ordinata all'origine: .....

Pendenza: .....

Equazione sotto forma esplicita:.....

.....

Equazione sotto forma implicita:.....

.....

Esercizio.

Dopo aver inserito i punti C (-1;4) e D (3;0) , determina la forma algebrica della funzione.

II) Per calcolare la forma algebrica d'una funzione affine abbiamo i seguenti modi:

i) Calcolo la pendenza e inserisco le coordinate d'un punto nella forma algebrica. A (4;2) e B (0;1) : pendenza:

.....

Inserisco le coordinate di A (4;2) oppure B (0;1), ottenendo l'equazione.

.....

.....

.....

.....

ii) Siccome devo calcolare due incognite utilizzo **un sistema d'equazioni** sostituendo le coordinate dei punti nell'equazione della funzione affine nel seguente modo:

$\begin{cases} 2 = 4a + b \\ 1 = 0a + b \end{cases}$ risolvendo ottengo $a = \frac{1}{4}$ e b = 1

Da cui la forma algebrica: $x \mapsto y = \frac{1}{4}x + 1$ oppure x - 4y + 4 = 0 (implicita)

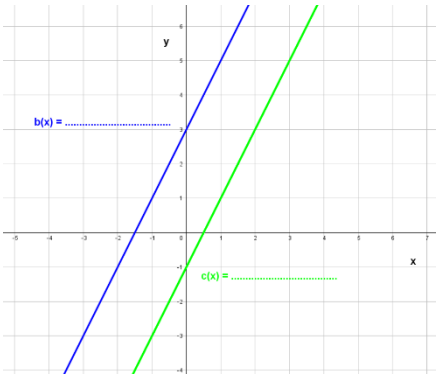
Esercizi: Determinare la forma algebrica della funzione affine passante per i punti:

i) A (-2; -4) B (1; 3) ii) C (-2; 4) D (1; - 2)

19) Rette parallele – rette perpendicolari. BM4 pag. 148 es. 27

Analizza, dopo aver rappresentato il triangolo della pendenza, le seguenti situazioni cosa puoi dedurre?

a) Rette parallele.



Forma algebrica funzione **a (x)** :

.....

.....

Forma algebrica funzione **b (x)** :

.....

.....

Conclusione.

.....

.....

b) Rette perpendicolari.

Forma algebrica funzione **a (x)** :

.....

.....

Forma algebrica funzione **c (x)** :

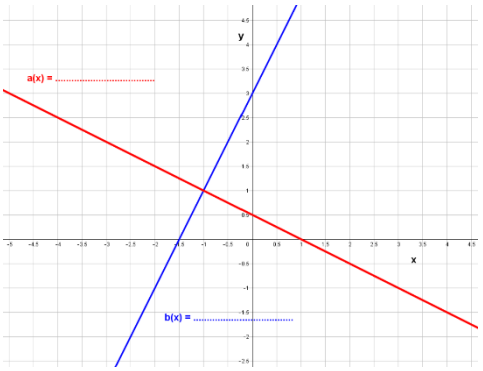
.....

.....

Conclusione.

.....

.....



Esempio 1

Fra le seguenti rette individuare se vi siano rette parallele o perpendicolari.

$a: x - 2y + 1 = 0$ $b: x + 3 = 0$ $c: 2x + y = 5$; $d: y = 5$; $e: x = 2y - 7$; $f: x = 8$

Esempio 2

Determinare l'equazione della retta **r** passante per $P\left(-2\,;\,\frac{2}{3}\right)$ che sia:

i) parallela alla retta **s** d'equazione $3x - 5y + 1 = 0$

ii) perpendicolare alla retta **q** d'equazione $y = -2x + 5$ ⚄

Esempio 3

I punti A (-2; -2), B (1; -2) e C (1;1) sono i vertici consecutivi d'un rettangolo. Dopo aver calcolato le equazioni dei lati, determina:

i) Le coordinate del vertice D.

ii) Le coordinate del punto d'incontro delle diagonali.

iii) Perimetro e area del rettangolo.

Chiaramente tutti gli esercizi vanno svolti sia su carta che con GeoGebra.

20) Risoluzione grafica di sistemi d'equazioni di primo grado.

BM4 pag.148 es. 27; pag.154 es. 42.

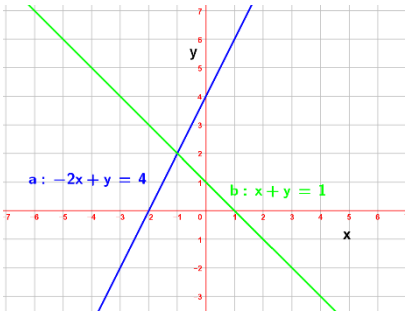
Esempio 1

Risolvi il seguente sistema prima algebricamente ed inseguito graficamente; cosa noti?

Soluzione algebrica:

$$\begin{cases} -2x + y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Soluzione grafica:



Conclusioni:

……

……

Diremo che il **sistema è determinato** e le due rette s'intersecano in un punto.

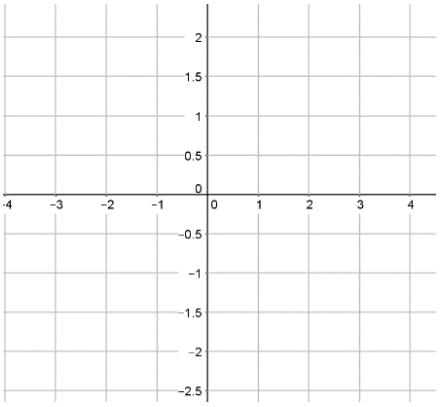
Esempio 2

Risolvi il seguente sistema prima algebricamente ed inseguito graficamente; cosa noti?

Soluzione algebrica:

$$\begin{cases} -x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Soluzione grafica:



Conclusioni:

……

……

Diremo che il sistema è …… e le due rette non s'intersecano in un punto.

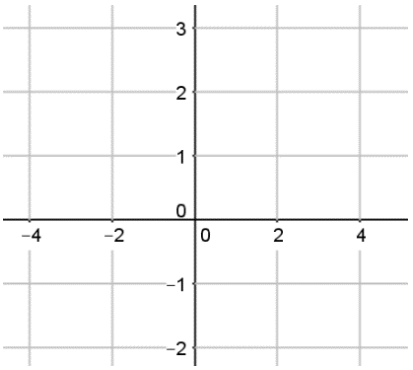
Esempio 3

Risolvi il seguente sistema prima algebricamente ed inseguito graficamente; cosa noti?

Soluzione algebrica:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

Soluzione grafica:



Conclusioni:

……

Diremo che il sistema è …… e le due rette sono **coincidenti** e l'insieme soluzione è:

……

……

21) Risoluzione grafica di sistemi d'equazioni di grado superiore.

BM4 pag. 153 es. 38

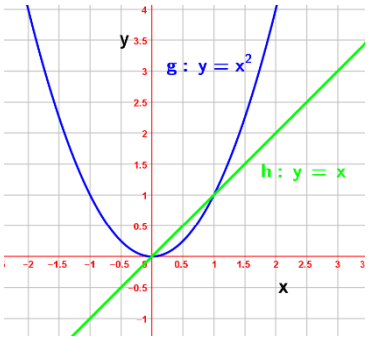
Esempio 1

Risolvi il seguente sistema prima algebricamente ed inseguito graficamente; cosa noti?

Soluzione algebrica:

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Soluzione grafica:



Conclusioni: .....

.....

.....

Diremo che il sistema è determinato e la retta e la parabola s'intersecano nei punti di coordinate.....

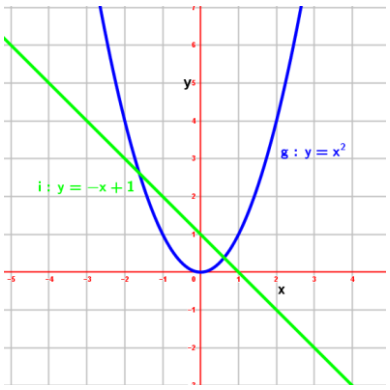
Esempio 2

Risolvi il seguente sistema prima algebricamente ed inseguito graficamente; cosa noti?

Soluzione algebrica:

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Soluzione grafica:



Conclusioni – osservazioni:

.....

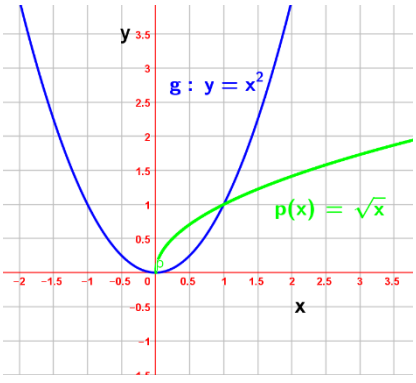
.....

.....

Esempio 3

Risolvi il seguente sistema prima algebricamente ed inseguito graficamente; cosa noti?

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ y - \sqrt{x} = 0 \end{cases}$$



Conclusioni – osservazioni:

.....

.....

22) Grandezze inversamente proporzionali.

BM3 pag. 68 – 69; pag. 141 – 147, es. 30 – 44;

Esempio 1 L'area del rettangolo.

Determina i possibili rettangoli aventi l'area di 20 cm^2; cosa noti?

Possiamo risolvere l'esercizio determinando la funzione che dati la base e l'altezza permetta di definire l'area:

.....

.....

.....

.....

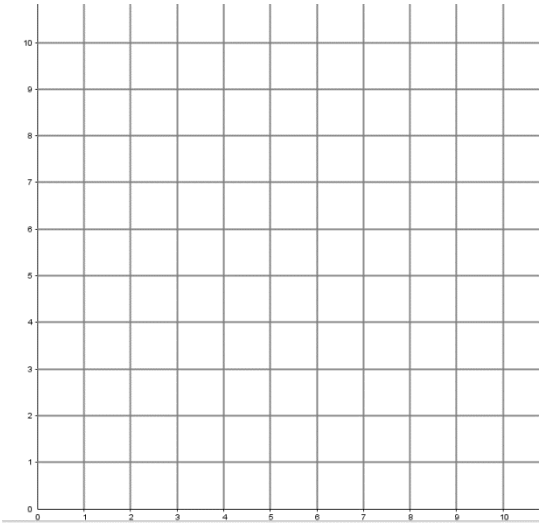
.....

.....

.....

.....

.....



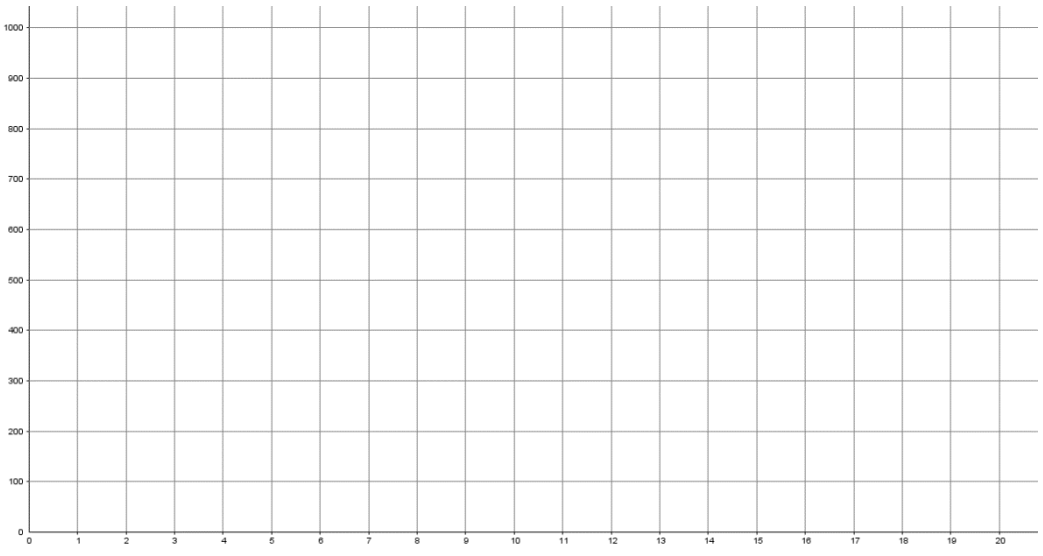
Matematicamente: .....

Conclusione: Le due grandezze sono .....proporzionali e la loro rappresentazione grafica è un ramo .....

.....

Esempio 2 La gita scolastica.

Una classe composta da 20 allievi effettua la gita di fine anno con un pullman, il cui prezzo è di 1'000 CHF. Determina la funzione che collega il costo individuale a dipendenza del numero dei partecipanti; cosa noti?



Funzione:

Conclusione: Le due grandezze sono .....proporzionali e la loro rappresentazione grafica è un ramo

.....

Esempio 3 Lo spazio, la velocità il tempo.

Devi percorrere una distanza di 100 km; come varia il tempo a dipendenza della velocità?

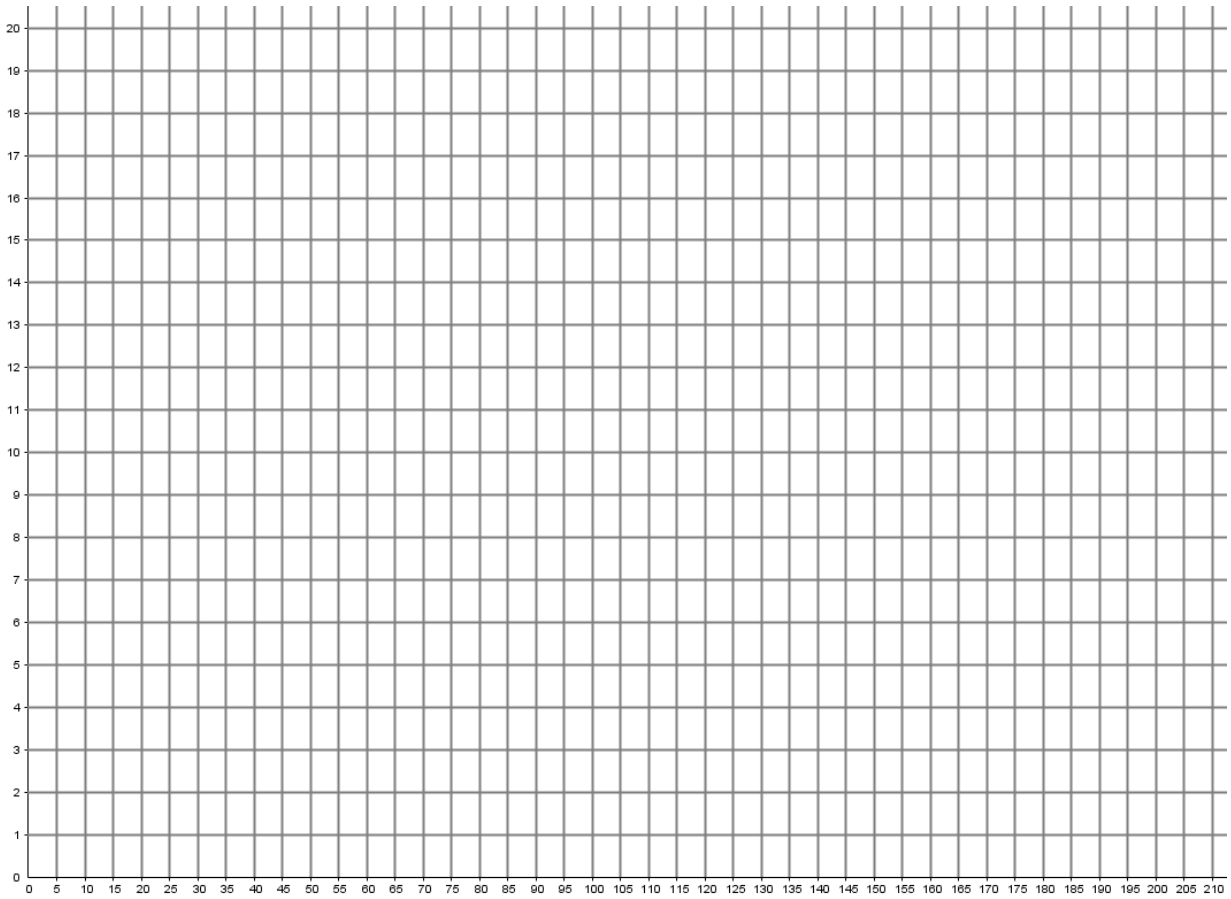
Qual è la funzione che collega le due grandezze? Cosa noti?

Ricorda: $S = v \cdot t$; da cui: v = ... ; t = ...

Funzione: $t : v \left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \longrightarrow t(\text{h}) \; ; x \mapsto t = \frac{S}{v}$

Tabella dei valori:

x (km/h)	0	1	5	8	10	20	25	50	100	150	200		x
y (h)													y = ...



Conclusione: Le due grandezze sono .....proporzionali e la loro rappresentazione grafica è un ramo .....

Osservazione: Matematicamente due grandezze sono .....

proporzionali, quando .....l'una .....diminuisce;

il loro **PRODOTTO** rimane ..... e la loro

rappresentazione grafica è un ramo d'iperbole.

23) La funzione omografica.

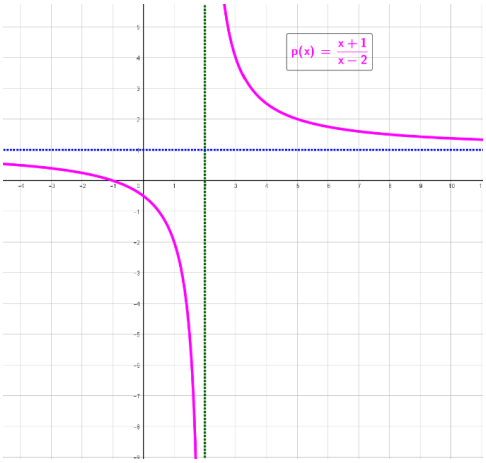
Prendiamo in considerazione la funzione reale del tipo:

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}$; Il dominio è $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}\right\}$; dunque sul grafico tutti i punti aventi.....uguale a $-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{c}}$ verranno esclusi, ottenendo così una retta detta **ASINTOTO VERTICALE.**

La funzione inversa è $f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; x \longmapsto \frac{b-dx}{cx-a}$; l'insieme delle immagini è dunque $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, dunque sul grafico tutti i punti aventi ..... uguale a $\frac{a}{c}$ verranno esclusi, ottenendo così una retta detta **ASINTOTO ORIZZONTALE.**

L'intersezione dei due asintoti è il centro disimmetria di due rami d'iperbole.

Esempio 1



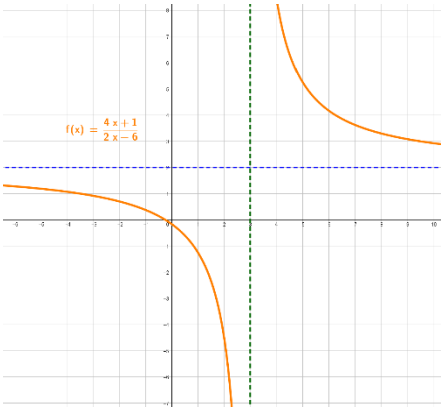
$\mathbf{p}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-2}}$

$D_p = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; **asintoto verticale:** x =.....

$Im_p = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; **asintoto orizzontale**: y =.....

x								
y								

Esempio 2 $\mathbf{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{4x+1}}{\mathbf{2x-6}}$

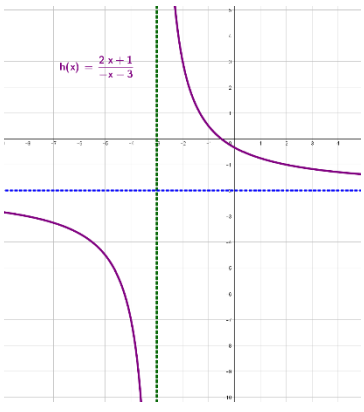


$D_f = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; **asintoto verticale:** x =.....

$Im_f = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; **asintoto orizzontale:** y =.....

x								
y								

Esempio 3. $\mathbf{h}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{-x-3}}$



$\mathrm{D_h} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ **asintoto verticale:** x =.....

$\mathrm{Im_h} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ **asintoto orizzontale:** y =.....

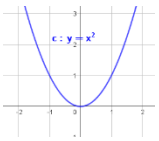
x								
y								

Esercizio: rappresenta i grafici delle seguenti funzioni reali.

$f: x \longmapsto \frac{6x-10}{2x+4}$; $g: x \longmapsto \frac{2x+8}{x+3}$; $h: x \longmapsto \frac{x-1}{2x+3} - 4$; $k: x \longmapsto \frac{3}{2x-2}$

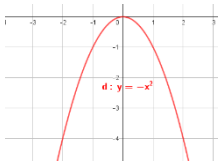
24) La funzione quadratica.

È una funzione de tipo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; x \longmapsto ax^2 + bx + c \ ; \ a \in \mathbb{R}^*, b \text{ e } c \in \mathbb{R}$
La cui rappresentazione grafica è una parabola con le seguenti caratteristiche:



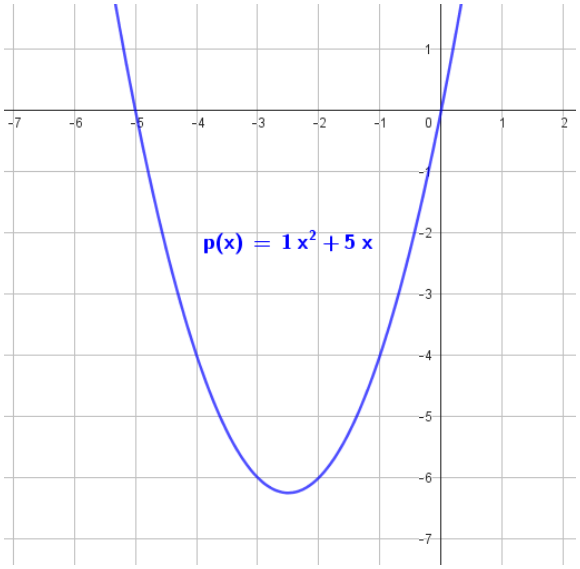
a) **Il coefficiente a di x^2;** se a > 0 parabola rivolta verso l'alto.

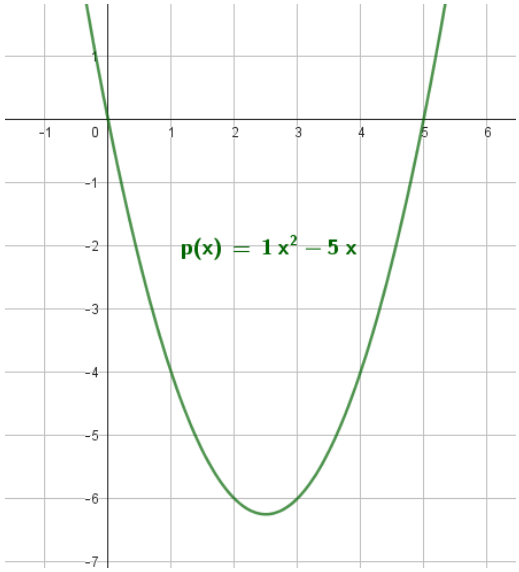
se a < 0 parabola rivolta verso il basso



Il coefficiente **a** mi dà la concavità della parabola.

b) **Il coefficiente di b di x;** mi sposta la parabola verso destra e sinistra.





Determina algebricamente e dal grafico:

i) l'equazione p(x) =0

.....

.....

.....

ii) Gli zeri della funzione

.....

iii) p(x) >0

.....

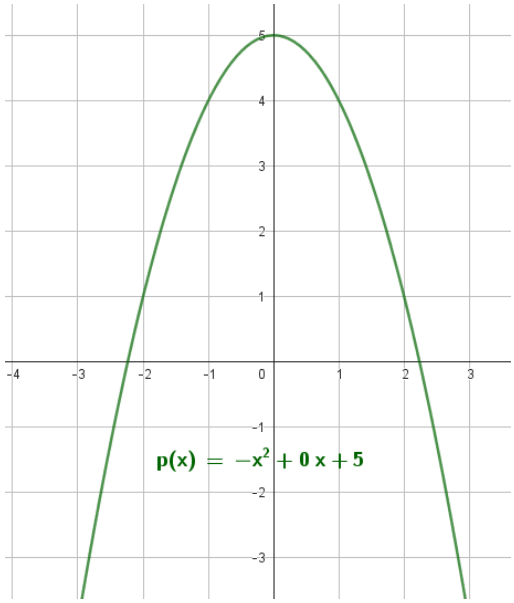
.....

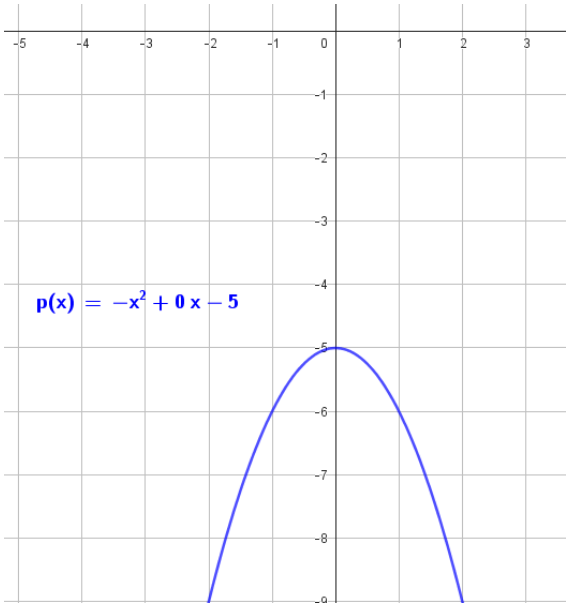
iv) p(x) <0

.....

.....

c) **Il coefficiente di c di x;** mi sposta la parabola verso alto e basso.





Determina algebricamente e dal grafico:

i) l'equazione p(x) =0

.....

.....

.....

ii) Gli zeri della funzione

.....

iii) p(x) >0

.....

.....

iv) p(x) <0

.....

.....

Esercizi:

a) Rappresenta le seguenti funzioni reali sul piano cartesiano (u= 2q) e determina:

i) Risolvi l'equazione f(x) = 0

ii) Gli zeri della funzione.

iii) f(x)> 0

iv) f(x)< 0

$f(x) = x^2+2x$; $g(x) = -x^2+2$; $h(x)= (x-2)^2$; $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ $k_1(x) = -2x^2 + 3$

Verifica i risultati con GeoGebra

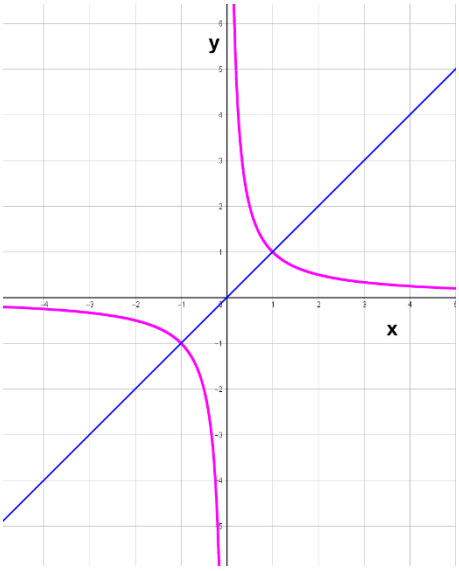
25) Risoluzione grafica d'equazioni. BM4 pag. 153 es. 38.

Con l'ausilio di rappresentazioni grafiche determina i valori delle soluzioni reali delle seguenti equazioni; verificale con il calcolo quando è possibile.

Esempio 1.

$\frac{1}{x} = x$

Rappresento le due funzioni sullo stesso grafico, determinando, se esistono i punti d'intersezione.



Verifico, eventualmente, con il calcolo.

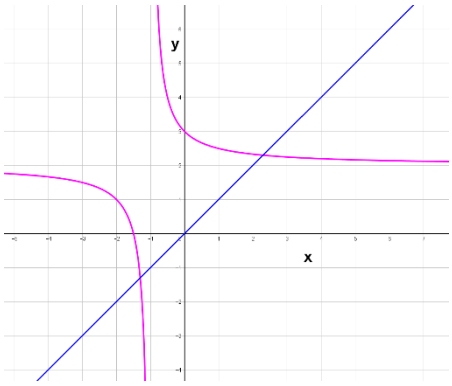
.....

.....

.....

.....

Esempio 2.



$\frac{2x+3}{x} = x$

Rappresento le due funzioni sullo stesso grafico, determinando, se esistono i punti d'intersezione.

Verifico, eventualmente, con il calcolo.

.....

.....

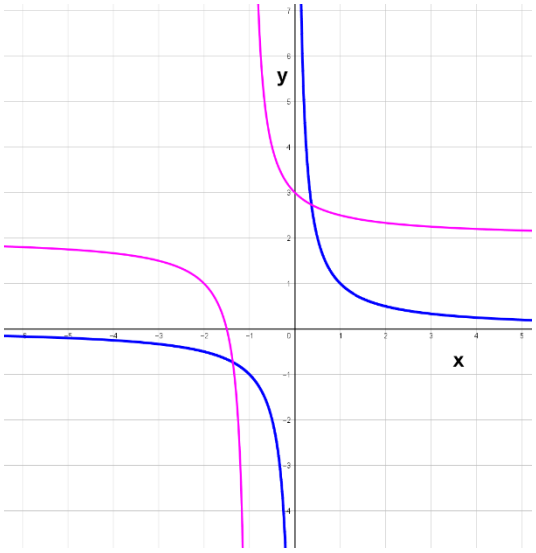
.....

.....

Esempio 3.

$\frac{2x+3}{x} = \frac{1}{x}$

Rappresento le due funzioni sullo stesso grafico, determinando, se esistono i punti d'intersezione.



Verifico, eventualmente, con il calcolo.

.....

.....

.....

.....

.....

26) La funzione esponenziale: grandezze crescenti – decrescenti esponenzialmente.

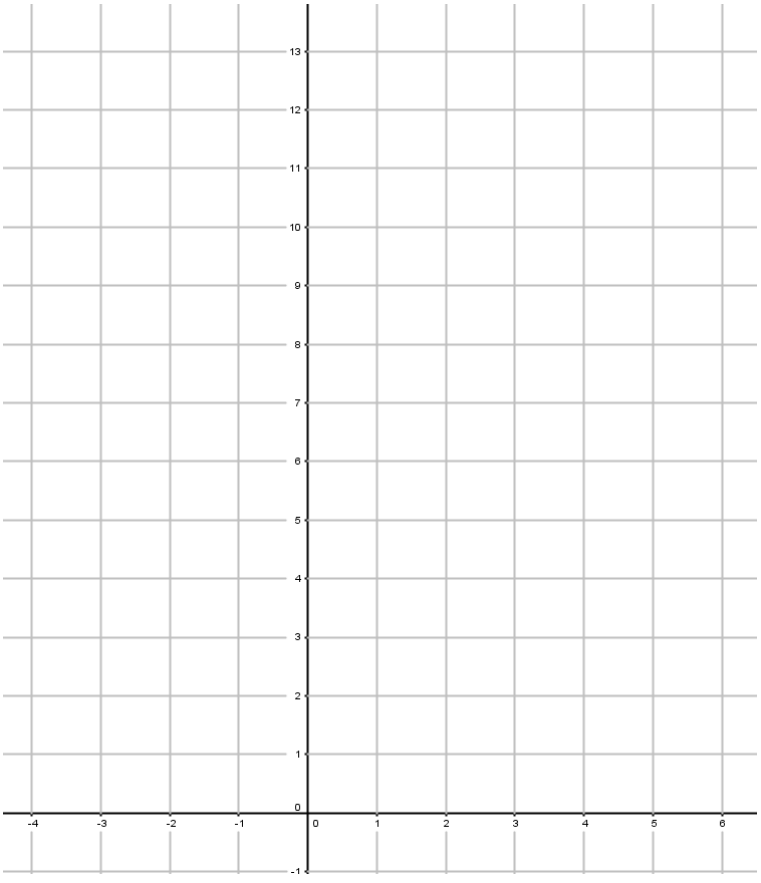
Esempio 1: La scacchiera di Sessa.



Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi, un indiano di nome Sessa, chiese di essere compensato con chicchi di grano; un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla sessantaquattresima casella.

Determina la funzione che collega il numero della casella e il rispettivo numero di chicchi di grano: rappresenta la situazione sul piano cartesiano. Casa capita se al posto di due chicchi avesse promesso 3 ; 4 ; 10 chicchi per casella? Rappresenta le situazioni e confrontale con la precedente.

x	y_2	y_3	y_4	y_{10}
0				
1	1	1	1	1
2	2	3	4	10
3				
4				
5				
6				
7				
8				
63				
64				
x	Y =	Y =	Y =	Y =



La funzione che otteniamo è detta funzione **ESPONENZIALE** e le due grandezze si dice che crescono in modo ESPONENZIALMENTE.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ ; x \mapsto y = a^x$ con $a \in \mathbb{R}^+$ nel nostro caso $x \mapsto y = 2^{x-1}$

Rappresenta con GeoGebra le seguenti funzioni reali esponenziali

$g_1: x \mapsto y = 2^{2x}$; $g_2: x \mapsto y = 2^{\frac{1}{2}x}$; $g_3: x \mapsto y = 2^{\frac{1}{x}}$; $g_4: x \mapsto y = 2^{x^2}$

Esempio2. La capitalizzazione composta. BM4 pag. 38 – 39; es. pag. 103.

Ricorda:

- L'interesse è il costo del denaro, e può essere attivo se investi dei capitali oppure passivo se li richiedi. L'interesse dipende dal Capitale **C**, dal .....**t** e dal tasso .....**i**.
  La formula per il calcolo dell'interesse è: **I**= **C** · **t** · i
  Formule inverse: .....
  Attenzione il tasso d'interesse e il tempo sono riferiti alla stessa unità di tempo!
  Esempio: tempo in mesi; interesse annuo, trasformo i mesi in anni.
  Esercizio:
  Calcola l'interesse accumulato da un C = 10'000 CHF al tasso d'interesse i=3 % in t_1 = 5 anni ; t_2 = 20 y 20m 10 d
- Il **Montante** è ottenuto aggiungendo al capitale l'interesse accumulato; dunque: **M** = **C** + **I** ; segue che M = C + ... ; dunque .....
  Formule inverse: .....
  .....
  Esercizio: Calcola il Montante ottenuto nell'esercizio precedente.
- Una capitalizzazione è detta semplice se l'interesse maturato viene aggiunto al termine del periodo contabile; in questo caso l'interesse accumulato è .....dipendente dal ....., lasciando chiaramente invariati il .....e il tasso d'interesse.

Ma cosa capita se l'interesse accumulato viene aggiunto "immediatamente" al capitale? Come variano le due grandezze, cioè il tempo e l'interesse?
Risolviamo i due esempi precedenti aggiungendo "immediatamente" l'interesse fruttato.
Indichiamo con C_0 =il capitale iniziale, M_t = il Montante ottenuto dopo t anni; i = il tasso d'interesse annuo e con t = il tempo; in generale abbiamo:

$M_1 = C_0 + I_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+i)$

$M_2 = M_1 + I_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) =$.....

$M_3 = M_2 + I_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) =$.....

$M_4 = C_0 \cdot (1+i)^4$ $\qquad$ $M_t = C_0 \cdot (1+i)^{\cdots\cdots}$

Puoi ora calcolare i due montanti degli esempi precedenti:

$C_0 = 10'000(\text{CHF})$ t_1 = 5 y ; i = 3 %

M_5= .....; I_5 =.....

Differenza tra l'interesse composto e l'interesse semplice?.....

t_2 = 20y 20 m 10d ; i = 3 % M_t= ..... ; I_t =.....

Differenza tra l'interesse composto e l'interesse semplice? .....

Come varia il montante nella capitalizzazione composta?

Il problema inverso:

Determina dopo quanto tempo con un capitale C = 10'000 (CHF) investito al tasso d'interesse annuo i = 5%, ottieni un montante di 100'000 CHF.

Sostituendo ottengo: $100'000 = 10'000\ (1 + 5\%)^t$

Dividiamo entrambi i membri per 10'000, ottengo: $10 = 1{,}05^t$

Devo determinare qual è l'esponente da dare a 1,05 per ottenere 10.

Che è un'equazione esponenziale, che va risolta utilizzando **i logaritmi.**

Il logaritmo è l'operazione inversa dell'elevazione a potenza rispetto all'esponente, vale a dire conosci la base della potenza e devi determinare l'esponete. Esempio:
$2^3 = 8$; equivale alla domanda qual è l'esponente che do a due per ottenere otto, matematicamente scritto nel seguente modo: $\log_2 8 = 3$ e si legge logaritmo in base 2 di 8 è uguale a 3; dove 2 è **la base** del logaritmo, 8 è **l'argomento** e 3 è **il logaritmo**.

Completa:

$\log_2 2 = \cdots \ldots$; $\log_2 16 = \cdots \ldots$; $\log_2 \frac{1}{2} = \cdots \ldots$; $\log_2 \frac{1}{4} = \cdots \ldots$; $\log_2 1024 = \cdots \ldots \ldots$; $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \cdots \ldots$;

$\log_{\frac{1}{4}} 16 = \cdots \ldots$; $\log_3 27 = \cdots \ldots$; $\log_3 \frac{1}{9} = \cdots \ldots$; $\log_7 49 = \cdots \ldots$; $\log_5 \frac{1}{25} = \cdots \ldots$; $\log_3 0 = \cdots \ldots$;

Osservazione:
Se la base del logaritmo è 10, normalmente non la si scrive:

$\log_{10} 100$ si scrive semplicemente $\log 10 = \cdots$; $\log \frac{1}{10} = \cdots \ldots$; $\log 10^{-4} = \cdots \ldots$; $\log 0{,}001 = \cdots \ldots$;

Sulla calcolatrice è possibile utilizzare 

il tasto .

Per calcolare esponenti particolari utilizzo 

invece il tasto inserendo la base e l'argomento.

Calcola utilizzando la calcolatrice e svolgendo la verifica.

$\log_2 1'048'576 = \cdots \ldots$; $\log_6 12 = \cdots \ldots$; $\log_{1,6} 10 = \cdots \ldots$; $\log_2 50 = \cdots \ldots$; $\log_{2,456} 100 = \cdots \ldots$;

Applicazione:

Possiamo ora risolvere equazioni del tipo $2^x = 8$ poiché è equivalente a .....

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali, trasformandole in logaritmi.
$2^x = 10$; $2^x = 10{,}8$; $3^x = 10$; $3^x = 123{,}7$; $1{,}3^x = 10$; $5^x = 52$; $5^x = 5{,}2$; $7{,}5^x = 52$;

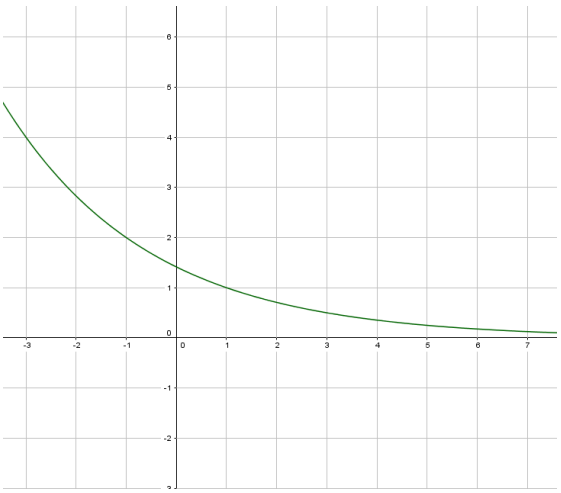
Potrai risolvere ora tranquillamente l'equazione del problema cioè: $10 = 1{,}05^t$
La risposta sarà : .....
Esercizio: Determina in quanto tempo con il capitale iniziale di 1'000 CHF, ottieni un montante di 1'000'000 CHF, avendo un interesse composto annuo del 5%?

Esempio 3.

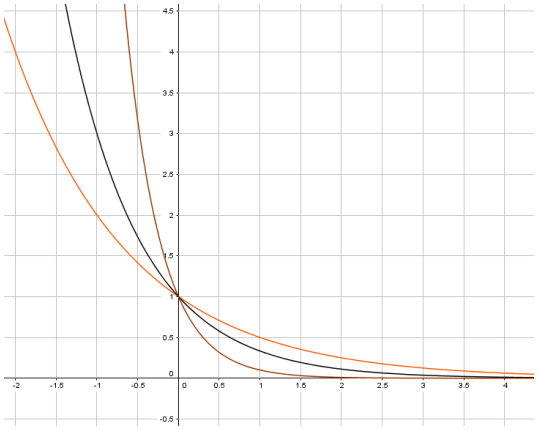
Quanto misurerà n-esimo lato del quadrato d'un ramo dell'albero di Pitagora in funzione del lato iniziale L_0?
Aiutandoci con una tabella, arriviamo alla conclusione che

$$m: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \; ; \; x \longmapsto y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1} \cdot L_0$$

Nr. Lato	Misura lato
1	L_0
2	$\frac{L_0\sqrt{2}}{2}$
3	$\frac{L_0\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L_0}{2}$
4	$\frac{L_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L_0\sqrt{2}}{4}$
x	$y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x-1} L_0$



Si può notare dal grafico che il lato del nuovo quadrato ..... in modo, non lineare ma **ESPONZIALE**; si parla di decrescita esponenziale.
Osservazione:
Quando la base della funzione esponenziale è compresa tra 0 e 1, $0 < a < 1$, il suo grafico rappresenta una curva decrescente.



Esercizio: Date le seguenti funzioni reali: $f: x \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $g: x \longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $h: x \longrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x$

Dopo aver compilato la tabella con alcuni valori significativi, associa ad ogni curva la propria forma algebrica.

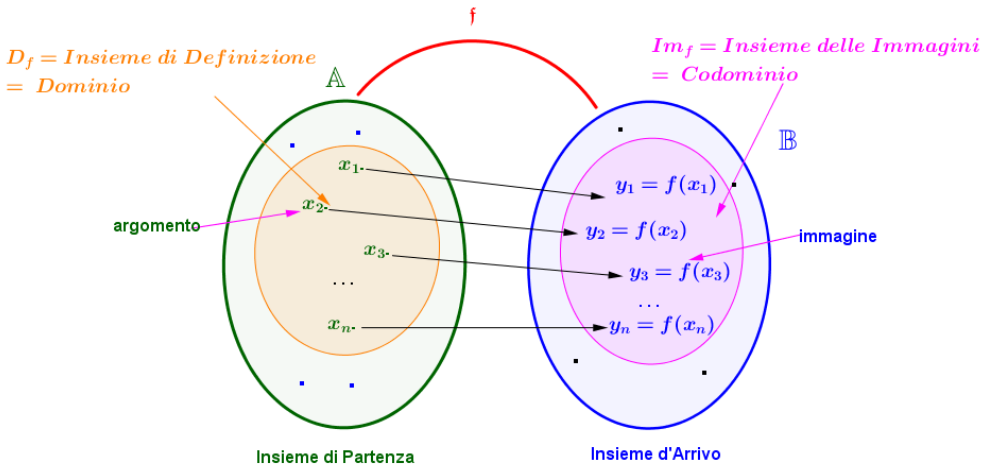
Applicazione:

1) Il Polonio è un elemento radioattivo che decade esponenzialmente. Fu scoperto da Marie Curie nel 1898. Se sono presenti al tempo iniziale $\mathbf{y_o}$ grammi di Polonio, il numero di grammi y restanti dopo un periodo **t** è dato dalla formula: $y = y_o \, e^{-0{,}005\,t}$ [e ??? ☺]
Determina:
i) L'equazione che rappresenta il decadimento radioattivo di una quantità di 5 grammi di Polonio in un periodo **t,** con **0 < t < 730 .**
iii) Dopo 2 anni quanti grammi di Polonio rimarranno? Dopo 150 anni?

2) La radioattività dopo Chernobyl; articolo CdT.

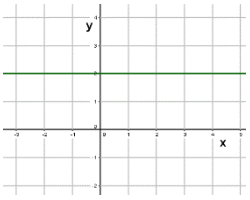
27) Riassunto sulle funzioni.

1) Concetto. f: A ⟶ B, x ⟼ y = f(x)



2) Tipi di funzioni reali e loro rappresentazione grafica: f: ℝ ⟶ ℝ

x ⟼ k



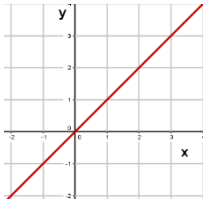
……

……

……

……

x ⟼ x



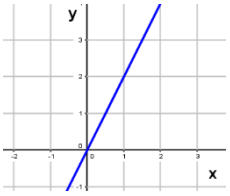
……

……

……

……

x ⟼ ax



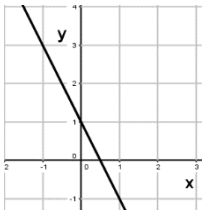
……

……

……

……

x ⟼ ax + b



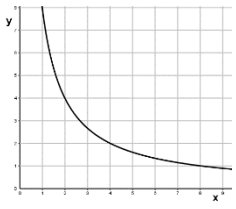
……

……

……

……

x ⟼ $\frac{k}{x}$



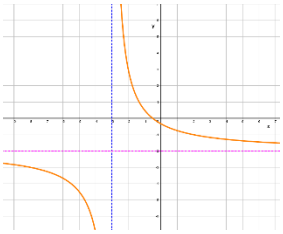
……

……

……

……

x ⟼ $\frac{ax+b}{cx+d}$



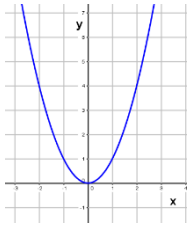
……

……

……

……

x ⟼ ax^2



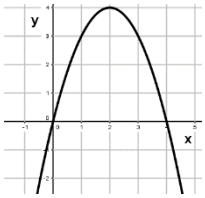
……

……

……

……

x ⟼ $ax^2 + bx + c$



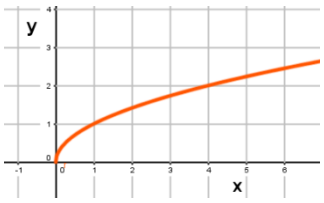
……

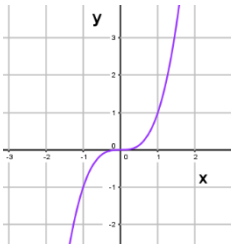
……

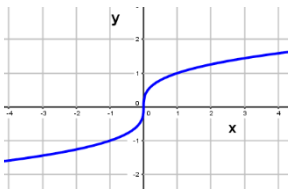
……

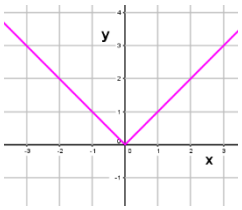
……

$x \mapsto \sqrt{x}$ $x \mapsto x^3$ $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ $x \mapsto |x|$







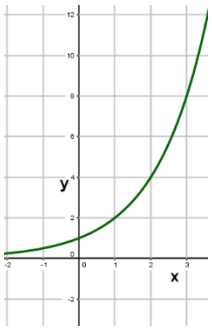


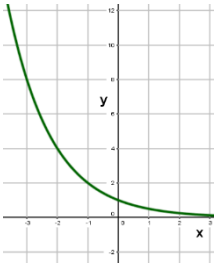
....

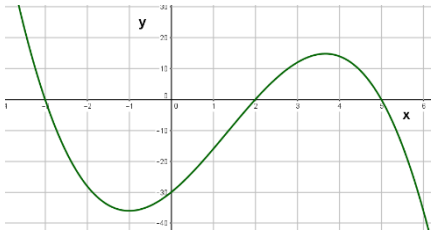
....

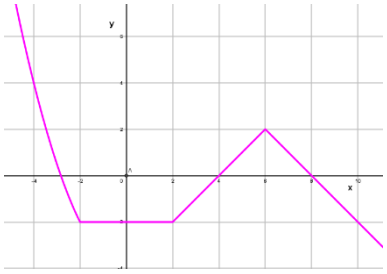
....

$x \mapsto a^x$ $x \mapsto a^x$ $x \mapsto (x + 3)(2 - x)(x - 5)$ **Funzione definita ad intervalli**









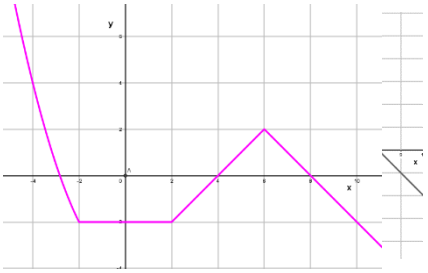
....

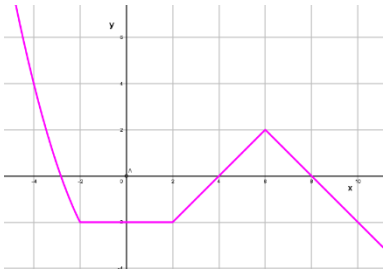
....

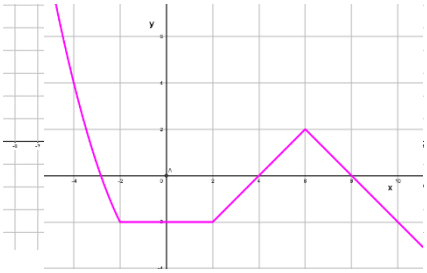
....

3) Simmetrie di rappresentazione grafiche di funzioni rispetto:

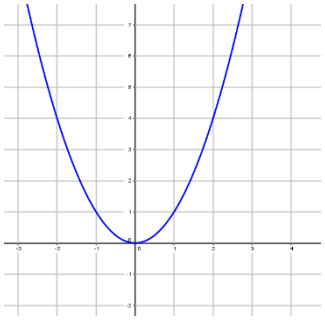
a) All'asse delle ordinate. b) All'asse delle ascisse. c) All'origine degli assi.

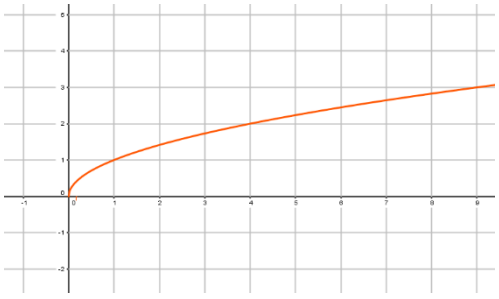






4) Traslazioni di rappresentazioni grafiche di funzioni.





5) Immagine – Argomento.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto 3x+1$; $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{3x+1}{x-2}$; $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{x+1}{\sqrt{x}}$;

Calcola **l'immagine**:

f(-3) = ...

g(2) = ...

h(1) = ...

Calcola **l'argomento**:

f(a) = -3; ..... a = ...;

g(b) = 2; .....b = ...;

h(c) = 1; .....c = ...;

6) Insieme di Definizione (Dominio) – Insieme delle immagini (Codominio)

Insieme di Definizione: .....

Insieme delle Immagini: .....

Determina l'insieme di definizione delle funzioni f (x) ; g(x) ; h(x).

D_f = ...

D_g = ...

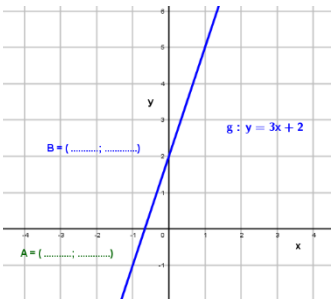
D_h = ...

7) L'intersezione con gli assi cartesiani – risoluzione grafica di disequazioni.

Intersezione asse delle **ascisse** (x): A (x ; 0)

Intersezione asse delle **ordinate** (x): B (0; y)

Calcola, se esistono, i punti d'intersezione delle seguenti funzioni con gli assi cartesiani e risolvi inseguito le disequazioni f(x)>0 e f(x)<0.



.....

.....

.....

.....

.....

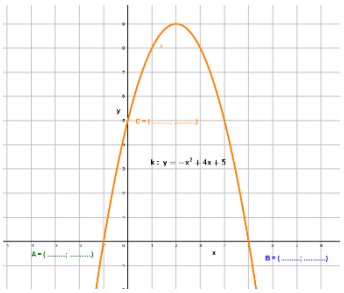
.....

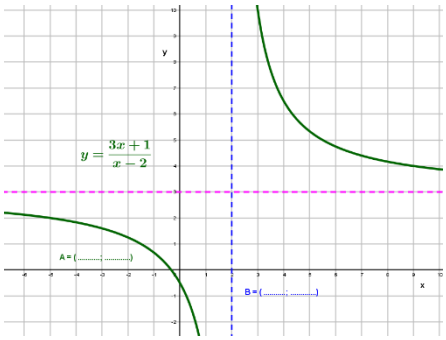
.....

.....

.....

.....





.....

.....

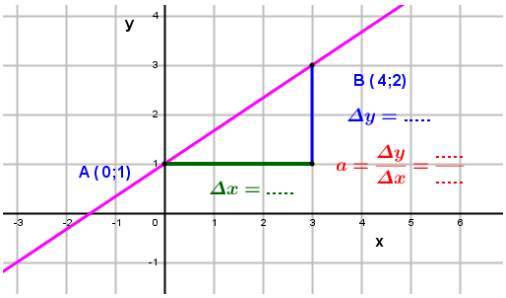
.....

.....

.....

.....

8) Rappresentazione d'una funzione affine.



$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \frac{2}{3}x + 1$ $\quad$ $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 2$

f: ordinata all'origine.....; pendenza.....

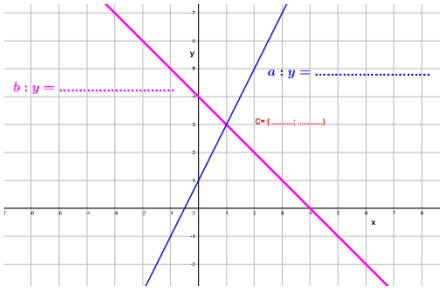
.....

g: ordinata all'origine.....; pendenza.....

.....

9) Relazione tra retta sul piano cartesiano – risoluzione d'un sistema di primo grado.

a) Rette incidenti.



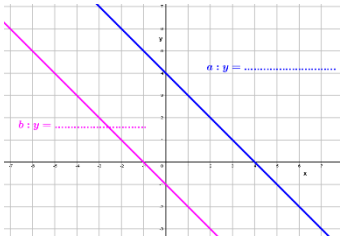
.....

.....

.....

.....

b) Rette parallele.



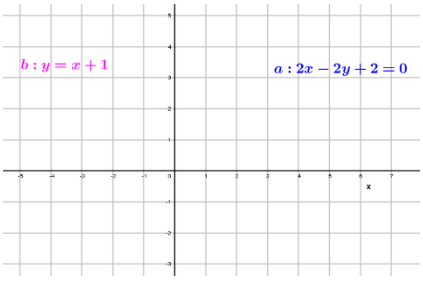
.....

.....

.....

.....

c) Rette coincidenti.



.....

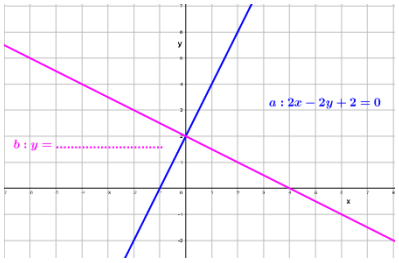
.....

.....

.....

.....

d) Rette perpendicolari.



.....

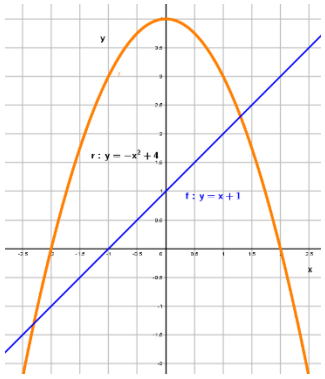
.....

.....

.....

.....

10) Risoluzione grafica d'equazioni – disequazioni.



Date le funzioni reali $r: x \longmapsto x^2 + 4$ $\quad$ $f: x \longmapsto x + 1$

Risolvi graficamente l'equazione r(x) = f(x) e r(x) ≤ f(x).

.....

.....

.....