Le Funzioni.

BM3 pag. 53 – 69; esercizi pag. 129 – 147.
LM cap. Insiemi - Funzioni

Riassumiamo con una tabella le grandezze considerate negli esempi precedenti.

Esempio	I Grandezza	II Grandezza	Relazione	Legge?
La scampagnata 1				
La scampagnata 2				
Il ciclomotore				
La telefonia mobile				
Il fosforo.				
La stagione di tennis				
La gita in bus.				
Il serbatoio.				

Quale di questi legami, **relazioni**, possiamo definire in modo preciso ed univoco?

.....

.....

Noi ci occuperemo, delle relazioni con un legame ben preciso, **le funzioni.**

Il concetto di FUNZIONE.

1) L'insieme delle coppie ordinate – **Il Prodotto cartesiano – Il grafo della relazione.**

Esempio 1:

Andrea, Bea e Carlo si sfidano al gioco delle freccette; quante e quali sono le possibili classifiche? Come posiamo rappresentarle?

Numero di possibili classifiche:

.....

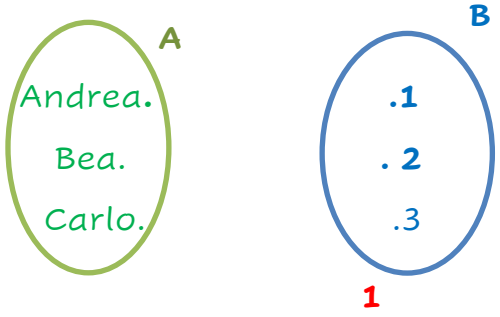
Quale posizione può raggiungere Andrea?

.....

Matematicamente scriveremo:

.....

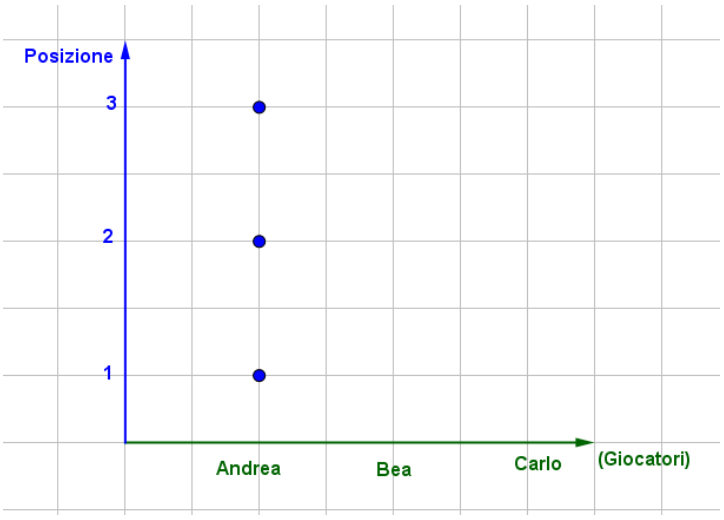
Possiamo rappresentare la situazione con un **diagramma sagittale** (o a frecce)



Considerando tutte le possibili posizioni dei tre amici, otteniamo un insieme di coppie, detto **prodotto cartesiano** tra gli insiemi **A** e **B**, che matematicamente scriveremo:

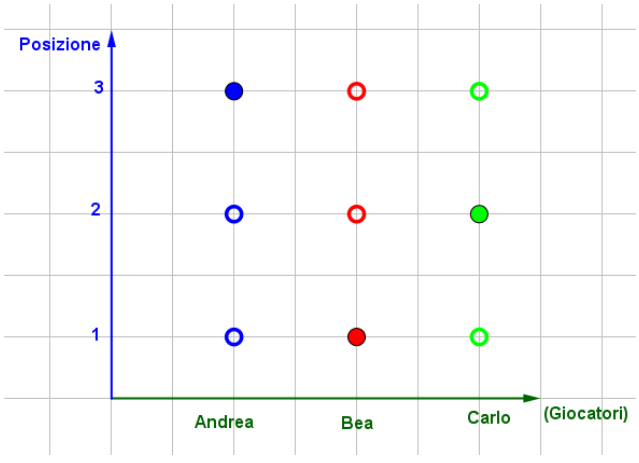
AxB = {(A ; 1); (A ; 2);(A ; 3); (… ; …);(… ; …);(… ; …);(… ; …); (… ; …); (… ; …); }

Che possiamo raffigurare anche con una **rappresentazione cartesiana**, nel seguente modo:



Chiaramente vi sarà una sola classifica, che logicamente potrai definire nei tre modi precedenti:

a) Con una **rappresentazione cartesiana**: **b)** Con **diagramma sagittale** (o a frecce):



c) Con una rappresentazione in estensione, detta **grafo della relazione**, che matematicamente scriveremo:

G_R = {(… ; …) ; (… ; …) ; (… ; …) }

Da bravissimo allievo noterai immediatamente che il Grafo della relazione (G_R) è un.....del prodotto cartesiano (AxB); matematicamente scriveremo: G_T ..... AxB.

Matematicamente diremo che abbiamo definito tra gli insiemi A e B, **la relazione:**

$\mathfrak{R}$: "amico che abbia ottenuto un punteggio maggiore rispetto ad un altro concorrente" e scriveremo:

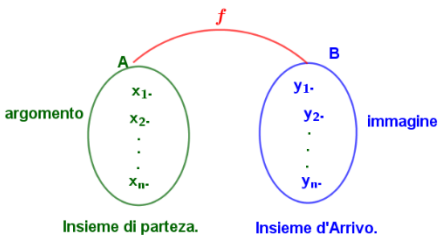
$\mathfrak{R}$: **A** ⟶ **B**; con "i punteggi di A maggiore di A_n"

A ⟶ **B**; si legge: **A verso B**

Ricorda!

A è **l'insieme di partenza**, mentre **B** è **l'insieme d'Arrivo**.

Indicheremo con **x**, detto **argomento**, un elemento che appartiene **all'insieme di partenza** e con **y**, detto **immagine**, un elemento che appartiene **all'insieme d'arrivo**.



Esempio 2:

Dato l'insieme **A = {4; 5; 6}** e la relazione: **r : A ⟶ A** ; se una cifra di A forma un numero pari di due cifre con un'altra cifra di A.

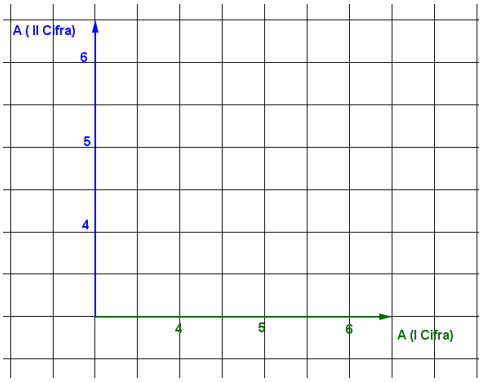
a) Quante sono le possibili coppie che puoi formare?

b) Definisci il prodotto cartesiano AxA =

c) Definisci le coppie che soddisfano la relazione nei tre modi:

i) **diagramma sagittale.**

ii) Con la rappresentazione cartesiana.



iii) Con il grafo della relazione. .....

.....

Esempio 3:

Dati gli insieme **A = {4; 5; 6}** e **B = {7; 8; 9}** la relazione: r : **B** ⟶ **A** ; se una cifra di B forma un numero di due cifre dispari con cifra di A.

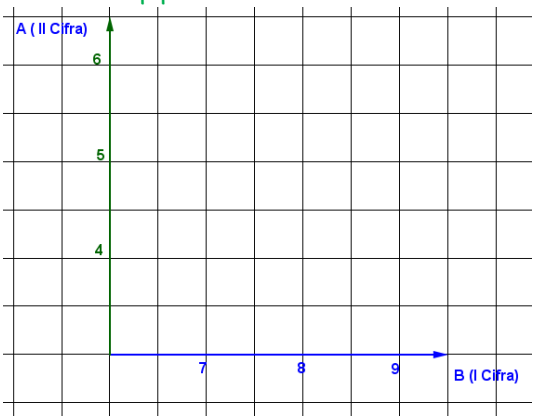
a) Quante sono le possibili coppie che puoi formare?.....

b) Definisci il prodotto cartesiano **B**x**A** = ...

c) Definisci le coppie che soddisfano la relazione nei tre modi:

i) Con il diagramma a frecce.

ii) Con la rappresentazione cartesiana.



iii) Con il grafo della relazione.

.....

Quali osservazioni puoi dedurre da questi due esempi?

.....

.....

Ora **DEVI** svolgere un qualche esercizio su Lineamenti di matematica.

Il prodotto cartesiano pag.141 – 142 es. 170 – 171

Operazioni con gli Insiemi – Problemi: es. pag. 171 – 176

La relazione: pag. 146 -147. Es. 180 -183

La relazione inversa: pag. 148. Es. pag. 184

2) Una relazione particolare – La funzione. BM3 pag. 58 -59.

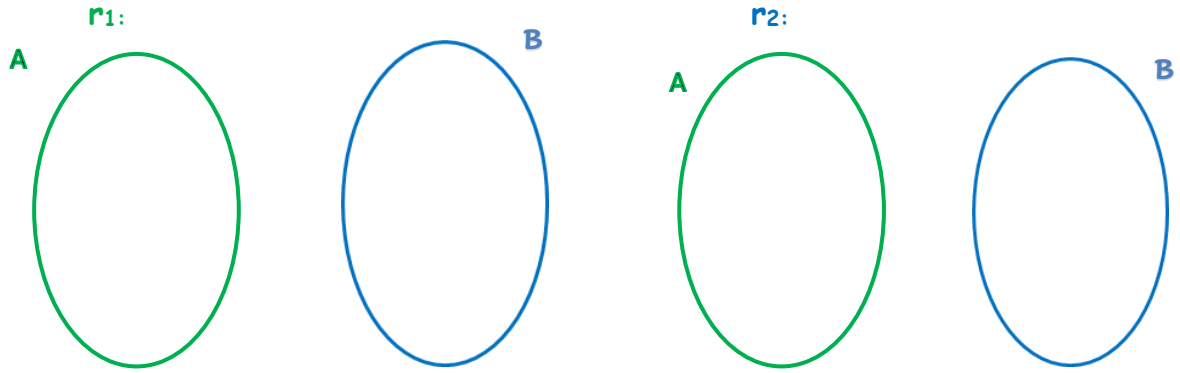
Esempio.

Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}^* \setminus x \leq 6\} = \{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\}$ e le seguenti relazioni:

$r_1 : A \longrightarrow A$; $x \in A$ è in relazione con $y \in A$, se **"x è divisore di y".**

$r_2 : A \longrightarrow A$; $x \in A$ è in relazione con $y \in A$, se **"x è il doppio di y".**

Rappresenta le due relazioni con il diagramma a frecce. Cosa noti?



Quali osservazioni puoi dedurre da questi due esempi?

.....

.....

.....

.....

Si può dedurre che:

Nella relazione r_1 ogni elemento dell'insieme di partenza ha più immagini nell'insieme d'arrivo, mentre nella relazione r_2 agni elemento dell'insieme di partenza possiede al **massimo una immagine** nell'insieme d'arrivo.

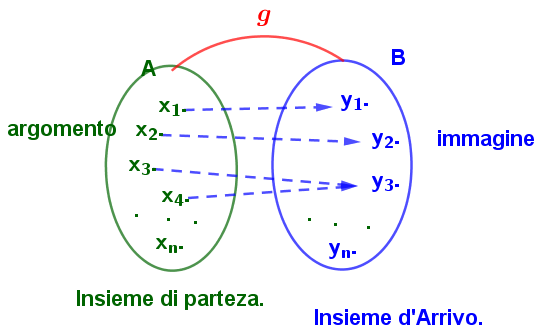
Matematicamente diremo che r_1 è una semplice relazione, mentre r_2 è **una FUNZIONE.**

Definizione:

Una relazione da un insieme di **partenza A** verso un insieme **d'arrivo B** è detta **FUNZIONE** f, se ad ogni elemento **x** appartenente all'insieme di **partenza A** **corrisponde al massimo un elemento y** dell'insieme **d'arrivo B**.

Osservazione: il nome d'una funzione è normalmente una lettera minuscola diversa dalle variabili (lettere che si usano nel calcolo letterale) e dalle incognite (lettere che si usano nelle equazioni).

Esempi: f ; g ; m ; n ; h; k ....



La relazione "g" rappresenta una funzione, matematicamente scriveremo:

$$g: A \longrightarrow B \qquad ; x \mapsto y = g(x)$$

Si legge: la **funzione g** definita da **A** verso **B** e **x** verso **y** uguale a **g** di x.

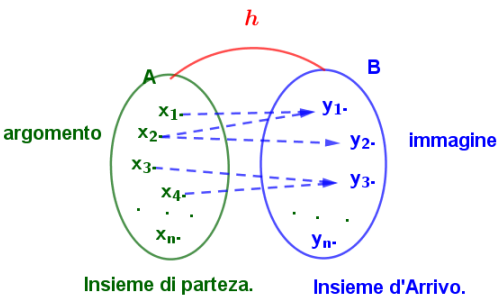
Dove la $\longrightarrow$, indica una relazione tra insiemi, mentre $\mapsto$ indica una relazione tra elementi.

Avremo: $g(x_1) = y_1$; $g(x_2) = y$..... ; $g(x$.....$) = y_3$; : $g(x_4) = y$..... ;

E si legge: y_1 è **l'immagine** dell'**argomento** x_1 secondo la funzione g.

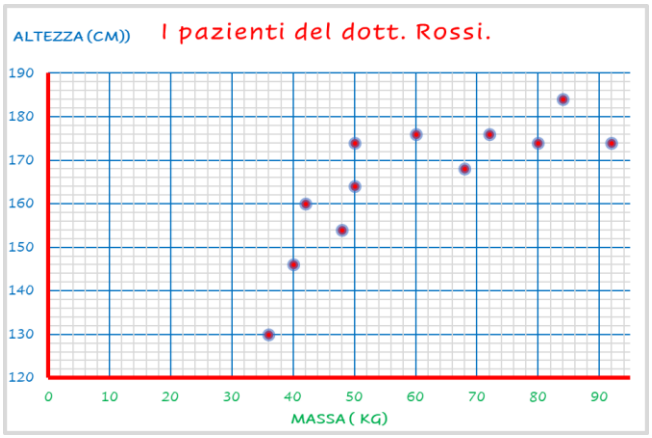
Contro esempio:

La relazione "h", non rappresenta una funzione poiché: $h(x_2)$ = ...; ma anche $h(x_2)$ = ...; dunque l'elemento x_2 possiede due immagini, di conseguenza la relazione h non rappresenta un funzione.

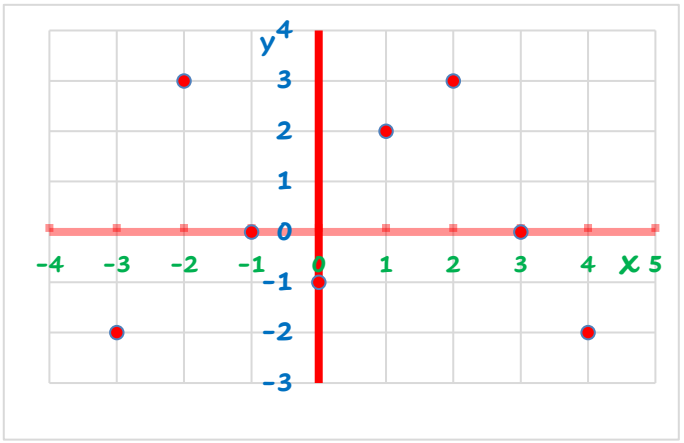


Esercizio:Indica se le seguenti relazioni possono essere considerate rappresentazioni di funzioni. Definisci inseguito l'insieme di Partenza, l'insieme d'Arrivo e la relazione; determina, inseguito, il Grafo della relazione e compila la tabella.

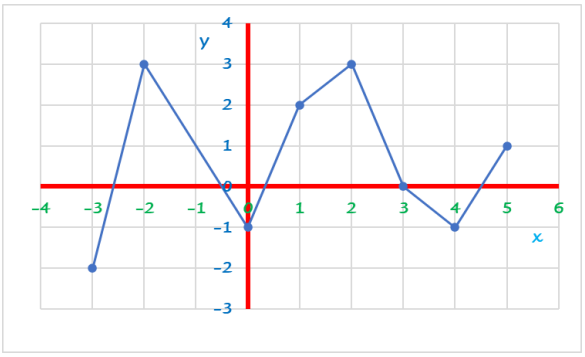
a)



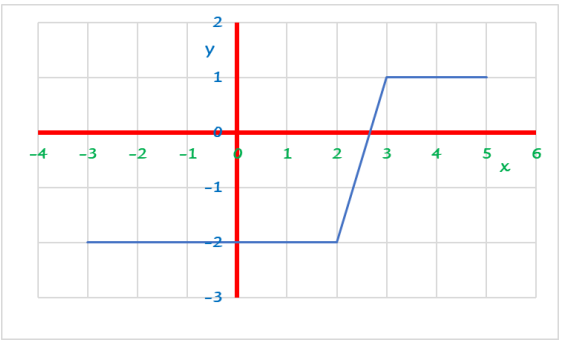
b)



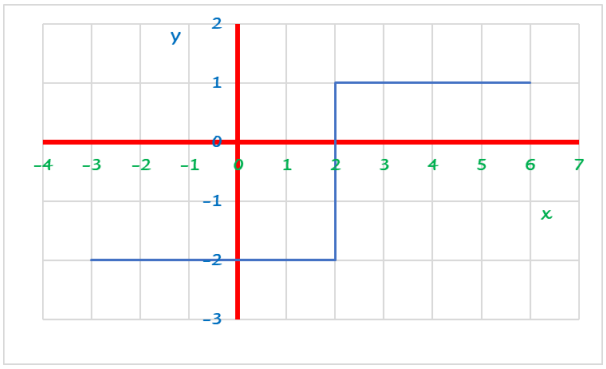
c)



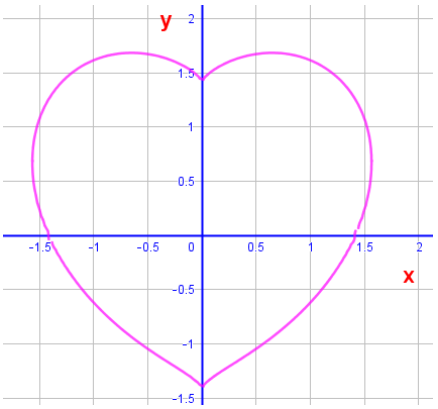
d)



e)



f)



Esercizio: stabilire nei seguenti esempi se il criterio di corrispondenza tra gli elementi può essere considerato quello d'una funzione.

a) L'insieme delle nazioni e le rispettive capitali.

.....

b) A = {Milano; Roma; Torino; Madrid; Barcellona; Londra} e l'insieme delle rispettive squadre di calcio che giocano nella massima serie della propria nazione.

.....

c) L'insieme dei giocatori famosi di calcio e le rispettive squadre di Club.

.....

d) L'insieme dei giocatori famosi di calcio e le rispettive squadre di Nazionale.

.....

e) L'insieme degli utenti e dei rispettivi numeri di cellulare.

.....

f) L'insieme degli allievi della tua classe e il rispettivo numero di scarpe.

.....

g) L'insieme degli allievi della tua classe e il rispettivo anno di nascita.

.....

h) L'insieme dei numeri naturali e la rispettiva metà.

.....

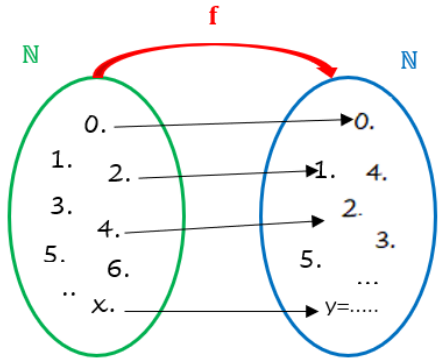
i) L'insieme dei numeri reali e la rispettiva metà.

.....

3) La rappresentazione d'una funzione.

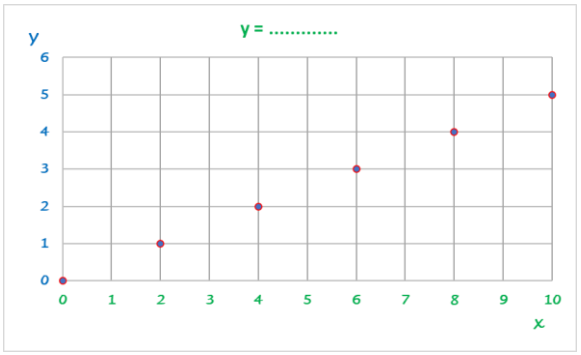
Una funzione, come una relazione, può essere rappresentata:

a) Con **un diagramma sagittale**



.....

b) **Rappresentazione cartesiana.**



.....

c) Con **il grafo della funzione**

$G_f = \{$ $\}$

d) **Con una tabella**.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0		1		2		3		4		5

Possiamo ora definire in modo matematico la precedente relazione con ***la forma algebrica della funzione***, nel seguente modo:

f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ si legge : funzione f, definita da N verso N.

$x \longmapsto \frac{1}{2}x$ si legge: x verso ½ di x; **oppure** anche

$x \longmapsto y = \frac{1}{2}x$ si legge: x verso y uguale a ½ di x.

Oppure: $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{2}$ si legge: x verso f di x uguale ½ di x

Osservazione: Cosa capita se cambi l'insieme di definizione d'una funzione? È importante? Perché?

.....

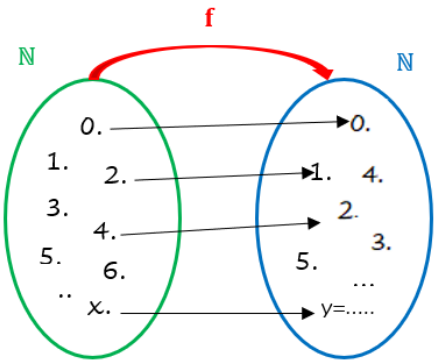
.....

Adesso **DEVI** risolvere gli esercizi sul BM3 a pag. 133 es.9/ pag. 134 es. 11; pag. 136 es. 14 / 15.

4) L'insieme di Definizione (Dominio) d'una funzione. BM3 pag. 60.

Esempio 1:

Prendiamo l'esempio precedente: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ ; x \mapsto \frac{1}{2}x$



Dalla rappresentazione sagittale noti che:

.....

.....

.....

.....

.....

Abbiamo dunque:

Insieme di **Partenza**: .....

Insieme d'**Arrivo** : .....

Insieme di definizione – Dominio: D_f= .....

Insieme delle Immagini – Codominio Im_f=.....

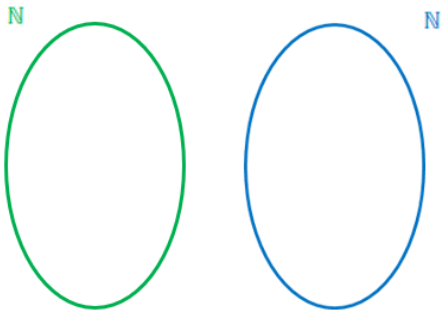
Osservazione: .....

.....

Esempio 2:

Data la funzione $h_1: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ ;\ x \mapsto y = 8 - x$

Rappresenta la funzione h_1 con il diagramma sagittale. Cosa noti?



.....

.....

.....

Abbiamo dunque:

Insieme di **Partenza**: .....

Insieme **d'Arrivo**: .....

Insieme di definizione – Dominio: D_{h1}= .....

Insieme delle Immagini – Codominio Im_{h1}=.....

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h1}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Razionali $\mathbb{Q}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h1}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h1}}$ = … … … … … … … … … … … … … …

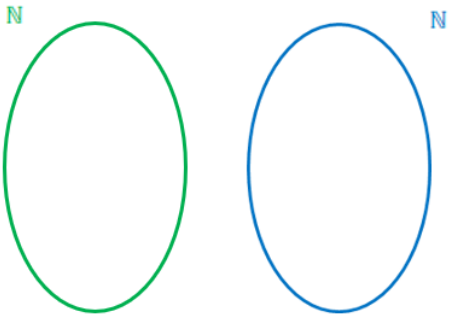
Osservazione: .....

.....

Esempio 3:

Data la funzione $\mathbf{h_2}$: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $x \longmapsto y = \frac{8}{x}$

Rappresenta la funzione h_2 con il diagramma sagittale. Cosa noti?



.....

.....

Abbiamo dunque:

Insieme di **Partenza:** .....

Insieme ***d'Arrivo***: .....

Insieme di definizione – Dominio: $\mathbf{D_{h2}}$= .....

Insieme delle Immagini – Codominio $\mathbf{Im_{h2}}$=.....

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h2}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Razionali $\mathbb{Q}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h2}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h2}}$ = … … … … … … … … … … … … … …

Osservazione: .....

.....

Esercizio determina il dominio e il codominio delle seguenti funzioni.

$f_1: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \frac{8-x}{2}\,;$

$f_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \frac{8}{x-1}\,;$

$f_3: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\,; x \longmapsto y = \frac{8-x}{2}\,;$

$f_4: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \frac{8}{x-1}\,;$

$f_5: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,; x \longmapsto y = \frac{8-x}{2}\,;$

$f_6: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}; x \longmapsto y = \frac{8}{x-1}\,;$

$f_7: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = x^2\,;$

$f_8: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \sqrt{8-x}\,;$

Esempio 4:

Data la funzione reale: $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y = \frac{8}{x-1}$; determina il dominio

.....

.....

Ricorda: il (o i) valore (i) che annullano il denominatore vanno sempre **esclusi** dal Dominio della funzione, nel nostro caso **Dg1 = $\mathbb{R}$ \ {1}**

Se il dominatore è formato da più fattori, dovrò escludere dal dominio tutti i valori che l'annullano.

Esempi.

a) Data la funzione reale: $g_2: x \mapsto y = \frac{8}{x(x-1)}$; calcola i valori che annullano il denominatore: x (x -1)= 0 ; da cui .....

.....

.....

Il dominio sarà: **D_{g2} = $\mathbb{R}$ \ {0; 1}** che posso anche scrivere: $D_{g2} = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

b) Data la funzione reale: $g_3: x \mapsto \frac{8-x}{(x+2)(x-1)}$; calcola i valori che annullano il denominatore: (2 + x) (x - 1)= 0 ; da cui segue:.....

Il dominio sarà: **D_{g3} = $\mathbb{R}$ \ {-2; 1}** .

Esempio 5.

Data la funzione reale $m: x \mapsto \sqrt{x-2}$ determina il dominio.

.....

.....

Osservazioni: .....

Adesso **DEVI** risolvere gli esercizi sul **BM3** a pag. 134 e pag. 136 es.16

5)Calcolo dell'immagine (y) - calcolo dell'argomento (x). BM3 pag. 61/2.

Esempio:

Si consideri la funzione reale:

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{2}{3}x + 5$ che vuol dire: $x \longmapsto y = \frac{2}{3}x + 5$

Il calcolo dell'immagine (y), conoscendo **l'argomento** (x).

per calcolare $\mathbf{f}(2) =$ basterà sostituire nella forma algebrica della funzione l'argomento **2** nel seguente modo.

.....

.....

posso anche dire: calcola l'immagine di 2. Avremo dunque: $f(2) =$ .....

Calcola $f(-3) =$

.....

.....

posso anche dire: calcola l'immagine di -3. Avremo dunque: $f(3) =$ .....

Il calcolo **dell'argomento (x)** conoscendo **l'immagine (y).**

per calcolare $f(x) = 2$; basterà sostituire nella forma algebrica della funzione l'immagine **2** nel seguente modo.

.....

.....

Posso anche dire: calcola l'argomento di **2**. Avremo dunque: $f(.....) =$

Calcola $f(a) = -3$; posso anche dire: calcola l'argomento di -3.

.....

.....

Esercizio:

Data la funzione reale $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto 3x^2 - 1$, che vuol dire $x \longmapsto y = 3x^2 - 1$

Calcolare **l'immagine**: $g(-2) =$ ..... ; $g(0) =$ ..... ;

Calcolare **l'argomento**: $g(x) = -2$; $g(x) = 0$

Adesso **DEVI** risolvere gli esercizi sul **BM3** a pag. 136 - 137 es.17-21