Le Funzioni.

BM3 pag. 53 – 69; esercizi pag. 129 – 147.
LM cap. Insiemi - Funzioni

Riassumiamo con una tabella le grandezze considerate negli esempi precedenti.

Esempio	I Grandezza	II Grandezza	Relazione	Legge?
La scampagnata 1				
La scampagnata 2				
Il ciclomotore				
La telefonia mobile				
Il fosforo.				
La stagione di tennis				
La gita in bus.				
Il serbatoio.				

Quale di questi legami, **relazioni**, possiamo definire in modo preciso ed univoco?

.....

.....

Noi ci occuperemo, delle relazioni con un legame ben preciso, **le funzioni.**

Il concetto di FUNZIONE.

1) L'insieme delle coppie ordinate – **Il Prodotto cartesiano – Il grafo della relazione.**

Esempio 1:

Andrea, Bea e Carlo si sfidano al gioco delle freccette; quante e quali sono le possibili classifiche? Come posiamo rappresentarle?

Numero di possibili classifiche:

.....

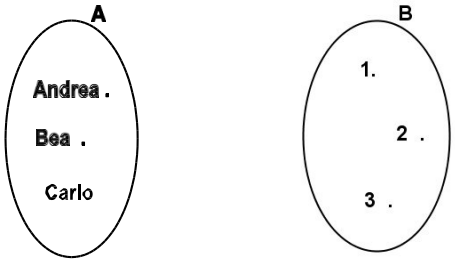
Quale posizione può raggiungere Andrea?

.....

Matematicamente scriveremo:

.....

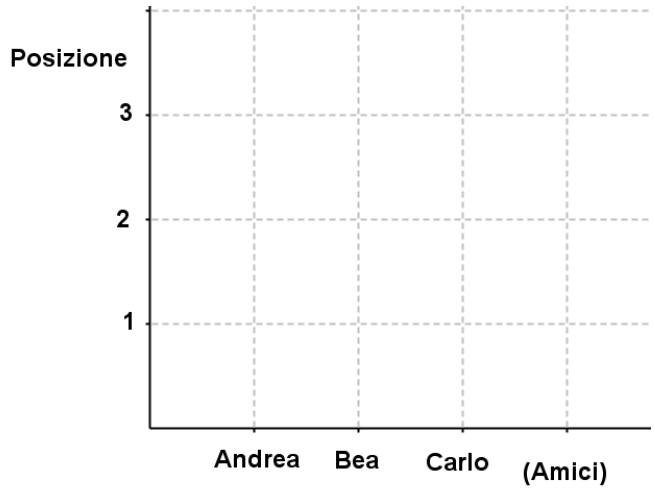
Possiamo rappresentare la situazione con un ***diagramma sagittale*** (o a frecce)



Considerando tutte le possibili posizioni dei tre amici, otteniamo un insieme di coppie, detto **prodotto cartesiano** tra gli insiemi **A** e **B**, che matematicamente scriveremo:

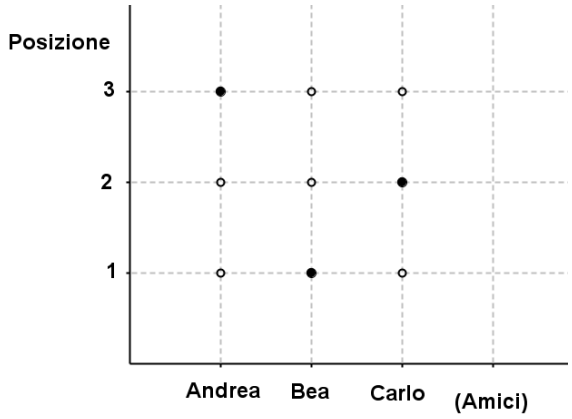
AxB = {(*a* ; 1); (*a* ; 2);(*a* ; 3); (… ; …);(… ; …);(… ; …);(… ; …); (… ; …); (… ; …); }

Che possiamo raffigurare anche con una **rappresentazione cartesiana**, nel seguente modo:



Chiaramente vi sarà una sola classifica, che logicamente potrai definire nei tre modi precedenti:

a) Con una **rappresentazione cartesiana**: **b)** Con **diagramma sagittale** (o a frecce):



c) Con una rappresentazione in estensione, detta **grafo della relazione**, che matematicamente scriveremo:

G_R = {(… ; …) ; (… ; …) ; (… ; …) }

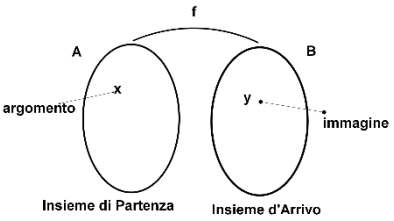
Da bravissimo allievo noterai immediatamente che il Grafo della relazione (G_R) è un.....del prodotto cartesiano (AxB); matematicamente scriveremo: G_T ..... AxB.

Matematicamente diremo che abbiamo definito tra gli insiemi A e B, **la relazione:**

$\mathfrak{R}$: "amico che abbia ottenuto un punteggio maggiore rispetto ad un altro concorrente" e scriveremo:

$\mathfrak{R}$: **A** ⟶ **B**; con "i punteggi di A maggiore di A_n"

A ⟶ **B**; si legge: **A verso B**



Ricorda!

A è **l'insieme di partenza**, mentre **B** è **l'insieme d'Arrivo**.

Indicheremo con **x**, detto **argomento**, un elemento che appartiene **all'insieme di partenza** e con **y**, detto **immagine**, un elemento che appartiene **all'insieme d'arrivo**.

Esempio 2:

Dato l'insieme **A = {4; 5 ; 6}** e la relazione: **r : A ⟶ A** ; se una cifra di A forma un numero pari di due cifre con un'altra cifra di A.

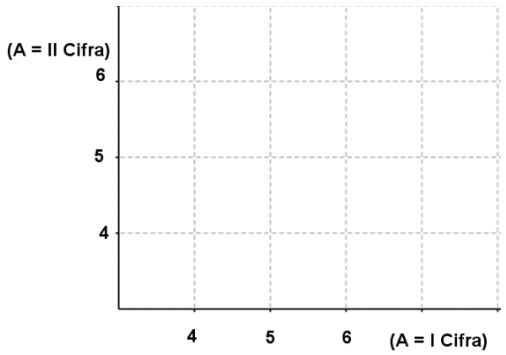
a) Quante sono le possibili coppie che puoi formare?

b) Definisci il prodotto cartesiano AxA =

c) Definisci le coppie che soddisfano la relazione nei tre modi:

i) Con il diagramma sagittale.

ii) Con la rappresentazione cartesiana.



iii) Con il grafo della relazione.

.....

.....

.....

Esempio 3:

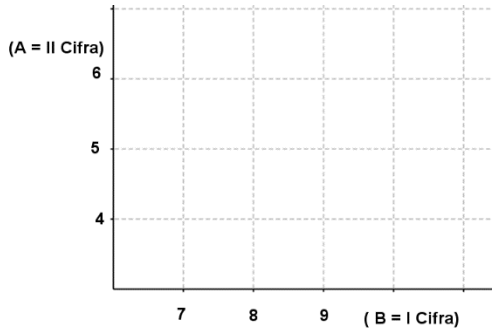
Dati gli insieme **A = {4; 5 ; 6}** e **B = {7; 8 ; 9}** la relazione: r : **B** ⟶ **A** ; se una cifra di B forma un numero di due cifre dispari con cifra di A.

a) Quante sono le possibili coppie che puoi formare?

b) Definisci il prodotto cartesiano **B**x**A** =

c) Definisci le coppie che soddisfano la relazione nei tre modi:

i) Con il diagramma a frecce. ii) Con la rappresentazione cartesiana.



iii) Con il grafo della relazione.

.....

.....

Quali osservazioni puoi dedurre da questi due esempi?

.....

.....

.....

Ora DEVI svolgere un qualche esercizio su Lineamenti di matematica.

Il prodotto cartesiano pag.141 – 142 es. 170 – 171

Operazioni con gli Insiemi – Problemi: es. pag. 171 – 176

La relazione: pag. 146 -147. Es. 180 -183

La relazione inversa: pag. 148. Es. pag. 184

2) Una relazione particolare – La funzione. BM3 pag. 58 -59.

Esempio.

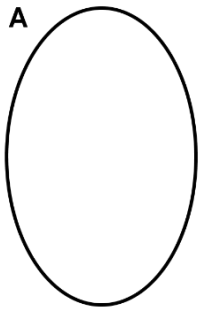
Dato l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}^* \setminus x \leq 6\} = \{\quad\}$ e le seguenti relazioni:

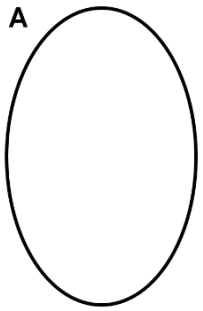
$r_1 : A \longrightarrow A$; $x \in A$ è in relazione con $y \in A$, se **"x è divisore di y".**

$r_2 : A \longrightarrow A$; $x \in A$ è in relazione con $y \in A$, se **"x è il doppio di y".**

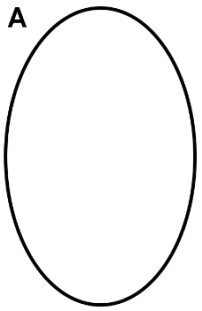
Rappresenta le due relazioni con il diagramma a frecce. Cosa noti?

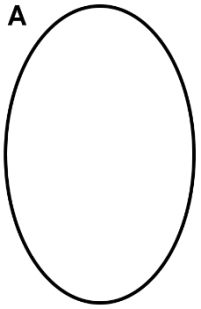
r_1:





r_2:





Quali osservazioni puoi dedurre da questi due esempi?

.....

.....

.....

.....

Si può dedurre che:

Nella relazione r_1 ogni elemento dell'insieme di partenza ha più immagini nell'insieme d'arrivo, mentre nella relazione r_2 agni elemento dell'insieme di partenza possiede al massimo una immagine nell'insieme d'arrivo.

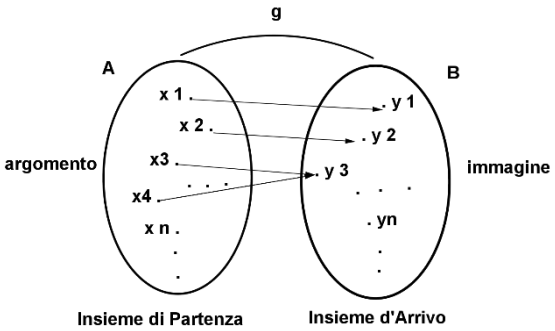
Matematicamente diremo che r_1 è una semplice relazione, mentre r_2 è **una FUNZIONE.**

Definizione:

Una relazione da un insieme di **partenza A** verso un insieme **d'arrivo B** è detta **FUNZIONE** f, se ad ogni elemento **x** appartenente all'insieme di **partenza A** **corrisponde al massimo un elemento y** dell'insieme **d'arrivo B**.

Osservazione: il nome d'una funzione è normalmente una lettera minuscola diversa dalle variabili (lettere che si usano nel calcolo letterale) e dalle incognite (lettere che si usano nelle equazioni).

Esempi: f ; g ; m ; n ; h; k ....



La relazione "g" rappresenta una funzione, matematicamente scriveremo:

$$g : A \longrightarrow B \qquad ; x \mapsto y = g(x)$$

Si legge: la **funzione g** definita da **A** verso **B** e **x** verso **y** uguale a **g** di x.

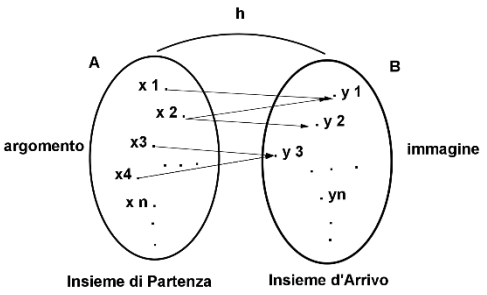
Dove la $\longrightarrow$, indica una relazione tra insiemi, mentre $\mapsto$ indica una relazione tra elementi.

Avremo: $g(x_1) = y_1$; $g(x_2) = y$..... ; $g(x$.....$) = y_3$; : $g(x_4) = y$..... ;

E si legge: y_1 è **l'immagine** dell'**argomento** x_1 secondo la funzione g.

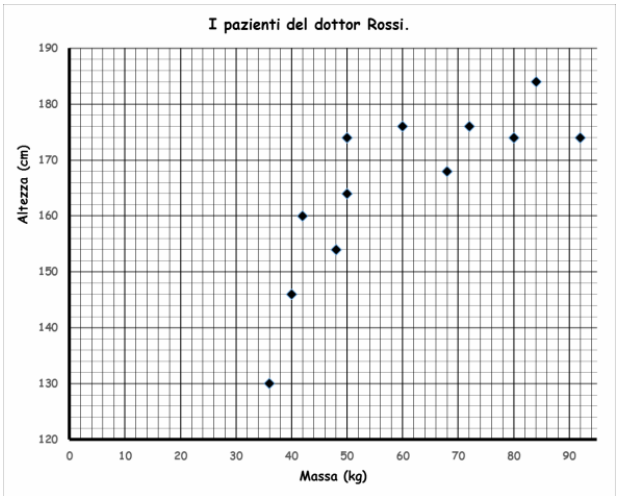
Contro esempio:

La relazione "h", non rappresenta una funzione poiché: $h(x_2)$ = ...; ma anche $h(x_2)$ = ...; dunque l'elemento x_2 possiede due immagini, di conseguenza la relazione h non rappresenta una funzione.

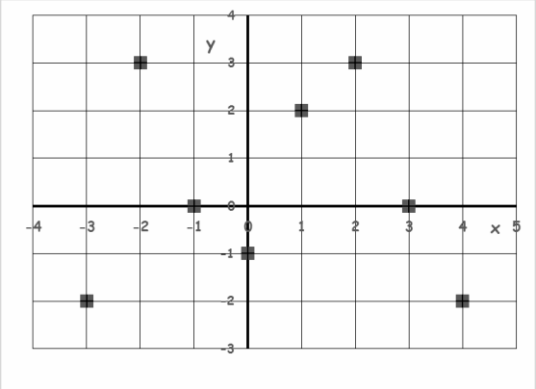


Esercizio:Indica se le seguenti relazioni possono essere considerate rappresentazioni di funzioni. Definisci inseguito l'insieme di Partenza, l'insieme d'Arrivo e la relazione; determina, inseguito, il Grafo della relazione e compila la tabella.

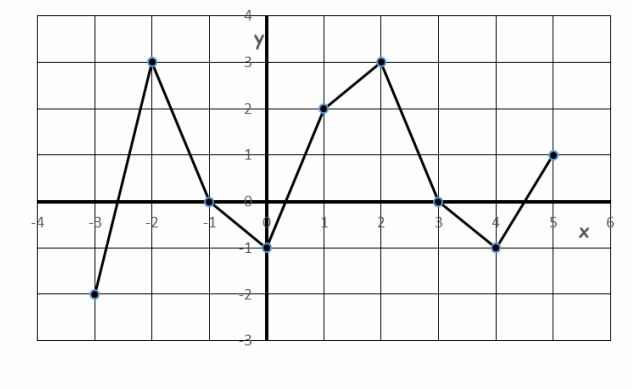
a)



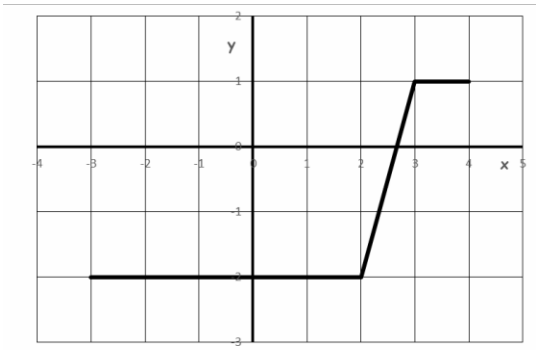
b)



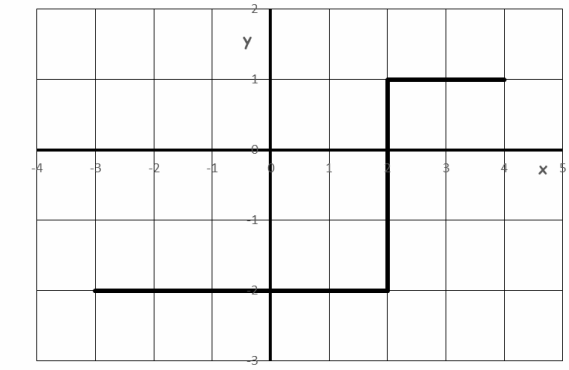
c)



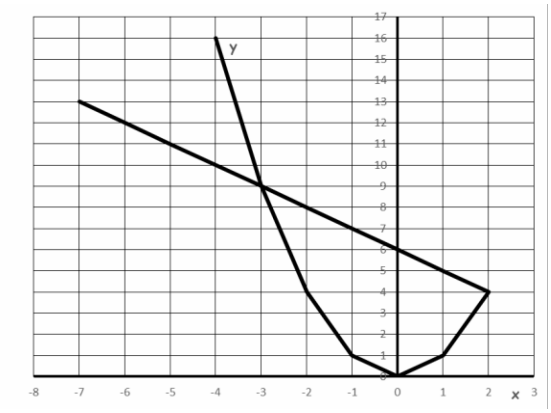
d)



e)



f)



Esercizio: stabilire nei seguenti esempi se il criterio di corrispondenza tra gli elementi può essere considerato quello d'una funzione.

a) L'insieme delle nazioni e le rispettive capitali.

.....

b) A = {Milano; Roma; Torino; Madrid; Barcellona; Londra} e l'insieme delle rispettive squadre di calcio che giocano nella massima serie della propria nazione.

.....

c) L'insieme dei giocatori famosi di calcio e le rispettive squadre di Club.

.....

d) L'insieme dei giocatori famosi di calcio e le rispettive squadre di Nazionale.

.....

e) L'insieme degli utenti e dei rispettivi numeri di cellulare.

.....

f) L'insieme degli allievi della tua classe e il rispettivo numero di scarpe.

.....

g) L'insieme degli allievi della tua classe e il rispettivo anno di nascita.

.....

h) L'insieme dei numeri naturali e la rispettiva metà.

.....

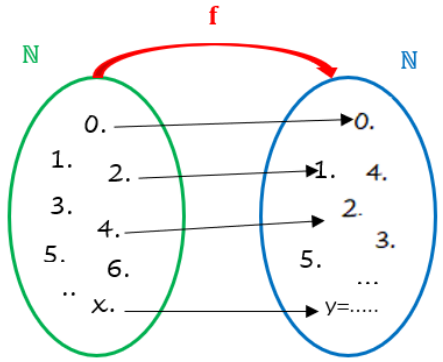
i) L'insieme dei numeri reali e la rispettiva metà.

.....

3) La rappresentazione d'una funzione.

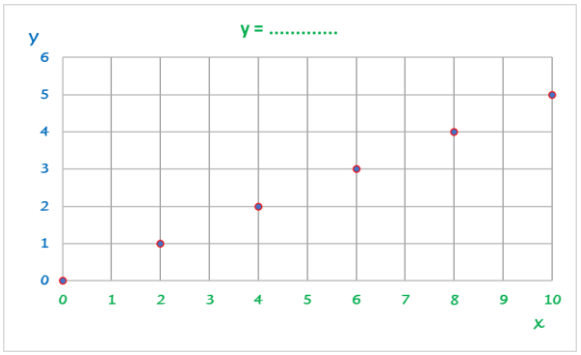
Una funzione, come una relazione, può essere rappresentata:

a) Con **un diagramma sagittale**



.....

b) **Rappresentazione cartesiana.**



.....

c) Con **il grafo della funzione**

$G_f = \{$ $\}$

d) **Con una tabella**.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0		1		2		3		4		5

Possiamo ora definire in modo matematico la precedente relazione con ***la forma algebrica della funzione***, nel seguente modo:

f: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ si legge : funzione f, definita da N verso N.

$x \longmapsto \frac{1}{2}x$ si legge: x verso ½ di x; **oppure** anche

$x \longmapsto y = \frac{1}{2}x$ si legge: x verso y uguale a ½ di x.

Oppure: $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{2}$ si legge: x verso f di x uguale ½ di x

Osservazione: Cosa capita se cambi l'insieme di definizione d'una funzione? È importante? Perché?

.....

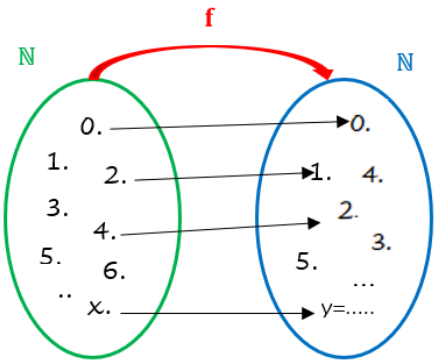
.....

Adesso **DEVI** risolvere gli esercizi sul BM3 a pag. 133 es.9/ pag. 134 es. 11; pag. 136 es. 14 / 15.

4) L'insieme di Definizione (Dominio) d'una funzione. BM3 pag. 60.

Esempio 1:

Prendiamo l'esempio precedente: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ ; x \mapsto \frac{1}{2}x$



Dalla rappresentazione sagittale noti che:

.....

.....

.....

.....

.....

Abbiamo dunque:

Insieme di **Partenza**: .....

Insieme d'**Arrivo** : .....

Insieme di definizione – Dominio: $\mathbf{D_f}$= .....

Insieme delle Immagini – Codominio $\mathbf{Im_f}$=.....

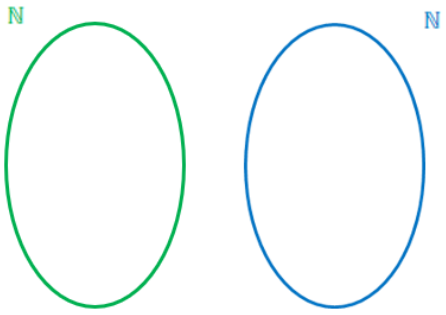
Osservazione: .....

.....

Esempio 2:

Data la funzione h_1: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\ ;\ x \mapsto y = 8 - x$

Rappresenta la funzione h_1 con il diagramma sagittale. Cosa noti?



.....

.....

.....

Abbiamo dunque:

Insieme di **Partenza**: .....

Insieme **d'Arrivo**: .....

Insieme di definizione – Dominio: $\mathbf{D_{h1}}$= .....

Insieme delle Immagini – Codominio $\mathbf{Im_{h1}}$=.....

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h1}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Razionali $\mathbb{Q}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h1}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_1}$ nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h1}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h1}}$ = … … … … … … … … … … … … … … …

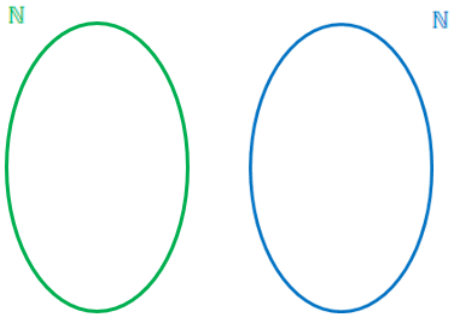
Osservazione: .....

.....

Esempio 3:

Data la funzione $\mathbf{h_2}$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$; $x \mapsto y = \frac{8}{x}$

Rappresenta la funzione h_2 con il diagramma sagittale. Cosa noti?



.....

.....

Abbiamo dunque:

Insieme di **Partenza:** .....

Insieme ***d'Arrivo***: .....

Insieme di definizione – Dominio: $\mathbf{D_{h2}}$= .....

Insieme delle Immagini – Codominio $\mathbf{Im_{h2}}$=.....

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Interi $\mathbb{Z}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h2}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Razionali $\mathbb{Q}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h2}}$= … … … … … … … … … … … … … … … … .

Definisci la funzione $\mathbf{h_2}$ nell'insieme dei numeri Reali $\mathbb{R}$, cambia qualcosa?

$\mathbf{D_{h2}}$= ⋯ … … … … … … … … … … … … … … … . . . ; $\mathbf{Im_{h2}}$ = … … … … … … … … … … … … … … …

Osservazione: .....

.....

Esercizio determina il dominio e il codominio delle seguenti funzioni.

$f_1: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \frac{8-x}{2}\,;$

$f_2: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \frac{8}{x-1}\,;$

.....

.....

.....

.....

$f_3: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}\,; x \longmapsto y = \frac{8-x}{2}\,;$

$f_4: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \frac{8}{x-1}\,;$

.....

.....

.....

.....

.....

$f_5: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,; x \longmapsto y = \frac{8-x}{2}\,;$

$f_6: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}; x \longmapsto y = \frac{8}{x-1}\,;$

.....

.....

.....

.....

.....

$f_7: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = x^2\,;$

$f_8: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\,; x \longmapsto y = \sqrt{8-x}\,;$

.....

.....

.....

.....

.....

Esempio 4:

Data la funzione reale: $g_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \mapsto y = \frac{8}{x-1}$; determina il dominio

.....

.....

Ricorda: il (o i) valore (i) che annullano il denominatore vanno sempre **esclusi** dal Dominio della funzione, nel nostro caso **Dg1 = $\mathbb{R}$ \ {1}**

Se il dominatore è formato da più fattori, dovrò escludere dal dominio tutti i valori che l'annullano.

Esempi.

a) Data la funzione reale: $g_2: x \mapsto y = \frac{8}{x(x-1)}$; calcola i valori che annullano il denominatore: x (x -1)= 0 ; da cui .....

.....

.....

Il dominio sarà: **D_{g2} = $\mathbb{R}$ \ {0; 1}** che posso anche scrivere: $D_{g2} = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

b) Data la funzione reale: $g_3: x \mapsto \frac{8-x}{(x+2)(x-1)}$; calcola i valori che annullano il denominatore: (2 + x) (x - 1)= 0 ; da cui segue:.....

Il dominio sarà: **D_{g3} = $\mathbb{R}$ \ {-2; 1}** .

Esempio 5.

Data la funzione reale $m: x \mapsto \sqrt{x-2}$ determina il dominio.

.....

.....

Osservazioni: .....

Adesso **DEVI** risolvere gli esercizi sul **BM3** a pag. 134 e pag. 136 es.16

5)Calcolo dell'immagine (y) - calcolo dell'argomento (x). BM3 pag. 61/2.

Esempio:

Si consideri la funzione reale:

$\mathbf{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{2}{3}x + 5$ che vuol dire: $x \longmapsto y = \frac{2}{3}x + 5$

Il calcolo dell'immagine (y), conoscendo **l'argomento** (x).

per calcolare $\mathbf{f}(2) =$ basterà sostituire nella forma algebrica della funzione l'argomento **2** nel seguente modo.

.....

.....

posso anche dire: calcola l'immagine di 2. Avremo dunque: $f(2) =$ .....

Calcola $f(-3) =$

.....

.....

posso anche dire: calcola l'immagine di -3. Avremo dunque: $f(3) =$ .....

Il calcolo **dell'argomento (x)** conoscendo **l'immagine (y).**

per calcolare $f(x) = 2$; basterà sostituire nella forma algebrica della funzione l'immagine **2** nel seguente modo.

.....

.....

Posso anche dire: calcola l'argomento di **2**. Avremo dunque: $f(.....) =$

Calcola $f(a) = -3$; posso anche dire: calcola l'argomento di -3.

.....

.....

Esercizio:

Data la funzione reale $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto 3x^2 - 1$, che vuol dire $x \longmapsto y = 3x^2 - 1$

Calcolare **l'immagine**: $g(-2) = ... ; g(0) = ... ;$

Calcolare **l'argomento**: $g(x) = -2$; $g(x) = 0$

Adesso **DEVI** risolvere gli esercizi sul **BM3** a pag. 136 - 137 es.17-21