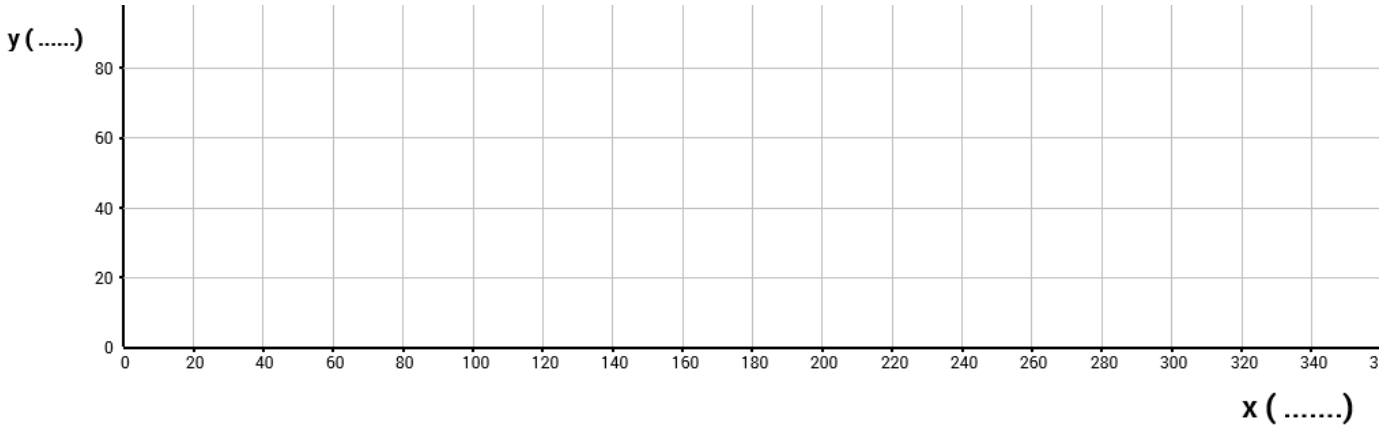
Le disequazioni. BM4 pag. 28 - 35 Esercizi pag. 97 – 98 es. 68 – 73.

1) Situazioni.

a) Con la mia compagnia telefonica C_1 pago 20 cts al minuto. Acquistando una tessera del valore di 60 CHF, determina:

i) Quanti minuti **<u>al massimo</u>** posso telefonare?

ii) Completa la situazione sul piano cartesiano.



iii) Determina sul grafico l'insieme soluzione.

iv) Verifica sul grafico:

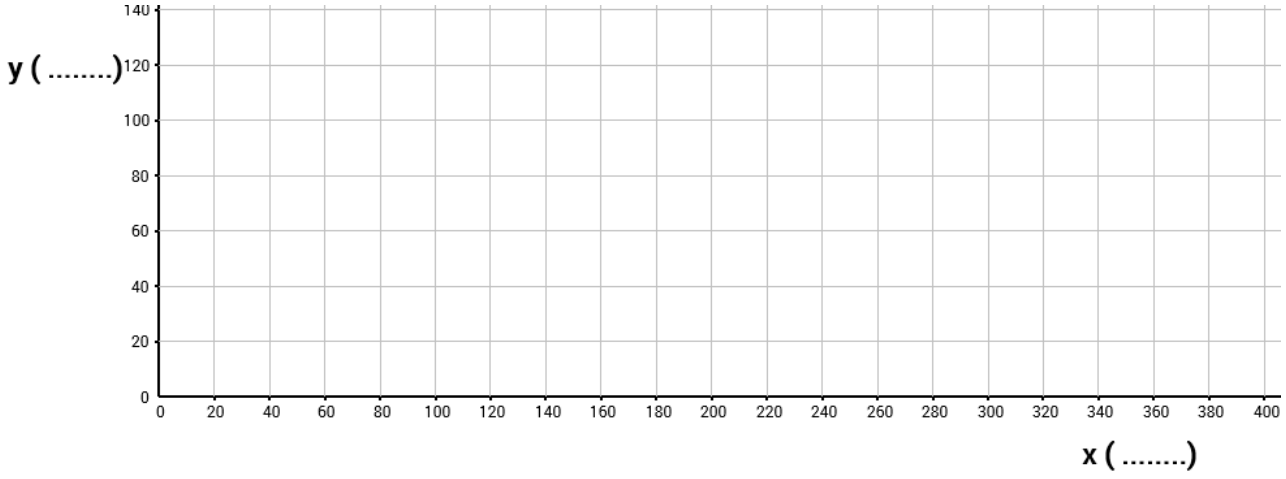
(1) Quanti minuti puoi telefonare con 20 CHF e 40 CHF? Come lo calcoleresti?

(2) Per telefonare 20 min.; 90 min. quanto spenderesti? Come lo calcoleresti?

b) Devo scegliere un abbonamento per il mio cellulare. La compagna C_1 mi propone di pagare 50 cts al minuto, la compagnia C_2 mi propone una tassa base di 60 CHF ed inseguito 20 cts al minuto. Determina:

i) A partire da quanti minuti mi conviene aderire alla proposta della compagnia C_2?

ii) Rappresenta la situazione su un grafico.



iii) Determina sul grafico l'insieme soluzione.

c) Per le mie prime tre verifiche di matematica ho preso le seguenti note: 4,5 – 5 – 4,5; quale noto dovrò prendere al minimo per arrivare alla media del cinque?

2) I simboli.

Per risolvere questi tipi d'esercizi abbiamo bisogno delle disequazioni.

Una disequazione è una relazione tra due espressioni algebriche con i simboli;

< … … … … … … … … …. ; ≤ … … … … … … … … …. ; > … … … … … … … … …. ; ≥ … … … … … … … … …

Esempi:

Definizione	**Espressione letterale**
Un numero maggiore di 12.	…….
…….	$x \geq 12$
Il triplo d'un numero minore o uguale a 100	…….
…….	$x + y > 7$
Il doppio d'un numero minore di – 8	…….
…….	$x + 2 \leq -7$
Il quadrato d'un numero maggiore di 40?	…….
…….	$x^2 \leq -9$
La metà d'un numero deve essere maggiore di 8.	…….
…….	$x^3 < -9$
…….	$\frac{1}{x} \leq 0$

Osservazioni: ……

Come noti risolvendo una disequazione ottieni diversi valori. Che vengono definiti con gli **intervalli** nel seguente modo.

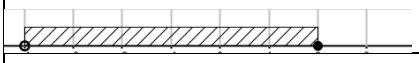
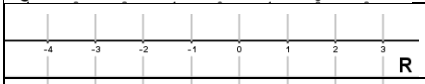
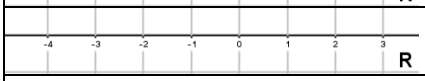
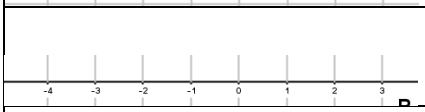
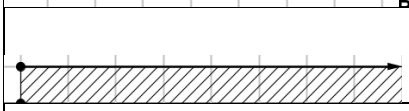
3) Gli intervalli.

Ricorda:

a) **[** : la parentesi quadra rivolta verso **l'interno** indica che l'elemento è compreso nell'insieme. (corrisponde ai simboli ≤ ; ≥)

b) **]** : la parentesi quadra rivolta verso **l'esterno** indica che l'elemento è **non** compreso nell'insieme. Attenzione **l'infinito** non è mai compreso. (corrisponde ai simboli < ; >)

c) Sulla retta numerica il punto vuoto ○ serve ad indicare che l'elemento non è compreso, mentre il punto colorato ● indica che l'elemento appartiene all'insieme soluzione.

Rappresentazione grafica	Intervallo	Disequazione
	$x \in]-4\,;\,2]$	$-4 < x \leq 2$
	$x \in [-4\,;\,2]$	……
	……	$-4 < x < 2$
	$x \in [-4\,;\,2[$	……
	$x \in [-4\,;\,+\infty[$	$x \geq -4$
	……	$x < 2$

Rappresenta le seguenti situazioni:

a) $x \in]-2;\,5[$ b) $x \geq -3$ c) $-1 \leq x < 3$ d) $x < -\sqrt{5}$

e) $-1 \leq x < 3$ oppure $x \geq 8$ f) $-1 \leq x < 3$ e $x \geq 8$

g) $-1 \leq x < 3$ oppure $8 \leq x < 12$ h) $-1 \leq x < 3$ e $8 \leq x < 12$

Osserva e calcola:

4 … … … . 5 ; 2 · 4 … … … . 2 · 5 ; (–2) · 4 … … … . (–2) · 5 ; (–6) · 4 … … … . (–6) · 5 ;

…… …… …… ……

Osservazioni:……

……

4) Disequazioni di primo grado.

a) Calcola un numero che aggiunto a 14 dia 23.

……

b) Quali sono i numeri che aggiunti a 14 siano maggiori di 23?

……

c) Calcola un numero che tolto a 14 dia 23.

……

d) Quali sono i numeri che tolti a 14 siano maggiori di 23?

……

e) Calcola un numero che tolto a 14 dia (-23).

……

f) Quali sono i numeri che tolti a 14 siano maggiori di (- 23)?

……

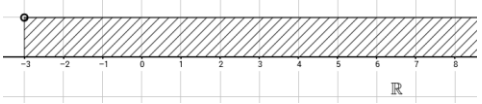
Osservazioni:

……

Esempi:

$x - 5 > -8$ da cui segue , $x > -3$

i) Rappresento la soluzione sulla retta numerica:



ii) Definisco l'insieme soluzione: Disequazione determinata $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} =]-3 ; +\infty[$

Risolvi le seguenti disequazioni, specificando l'insieme soluzione dopo averlo rappresentato sulla retta numerica.

a) $8 \geq x + 3$ b) $-x + 3 \leq -8$ c) $6x + 3 \geq 2x - 9$

d) $7 - x < 8$ e) $2 - 7x \leq 5x - 8$

f) $0 > 3x - 6$ g) $\frac{2}{3} - x \geq \frac{5}{3}$

Conclusione: ……

……

Esercizi.

Risolvi le seguenti disequazioni, specificando l'insieme soluzione dopo averlo rappresentato sulla retta numerica.

a) $2x(x + 1) \leq x(2x - 1) + 12$ b) $5x \geq -10x(x + 2)$

c) $(x + 1)^2 - 3x > x(x - 2)$ d) $(\sqrt{3} + 1)^2 - 3x < 2(2 + \sqrt{3}) + 2x$

Risolvi ora attentamente le seguenti disequazioni:

a) $2x + 2 < 2(x + 3)$ b) $2x + 2 \geq 2(x + 3)$

Risolvi le seguenti disequazioni, specificando l'insieme soluzione dopo averlo rappresentato sulla retta numerica.

a) $\frac{3x+1}{2} - \frac{7x+3}{6} \geq \frac{x}{3}$ b) $\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right) + x - 2 > \frac{x(x+9)}{9}$

Problemi da risolvere con le disequazioni.

a) La piscina comunale propone due tariffe per l'entrata:
   i) 8 CHF per i non soci
   ii) 3 CHF in aggiunta all'abbonamento annuale di 120 CHF.

Dopo quante ore risulta più conveniente la seconda alternativa?

b) Carlo, per le vacanze di Natale, deve scegliere tra l'abbonamento settimanale del costo di 120 CHF oppure la giornaliera di 25 CHF. A partire da quanti giorni è più conveniente l'abbonamento settimanale?

c) Investendo una certa somma ad un interesse del 3% annuo, s'ottiene di più che investendo 15 CHF al tasso del 3,5% annuo. Quale potrebbe essere la prima somma investita?

5) Sistemi di disequazioni.BM4 pag.28 - 32 es pag. 99. Es. 75 – 75 bis.

Esempio 1.

Rappresenta sulla retta numerica i seguenti insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq -2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus x < 3\}$



Definisci con il metodo degli intervalli gli elementi di $A \cap B =$

……

Matematicamente abbiamo determinato le soluzioni comuni ai due insiemi risolvendo un sistema di disequazioni e scriveremo:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \end{cases}$$

Il cui insieme soluzione è:

……

Esempio 2.

$A = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq -2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus x < 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \geq 1\}$



Definisci con il metodo degli intervalli gli elementi di $A \cap B \cap C =$

……

……

Matematicamente abbiamo determinato le soluzioni comuni ai tre insiemi risolvendo un sistema di disequazioni e scriveremo:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Il cui insieme soluzione è:

……

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4 < 0 \\ 3x \leq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 6 < 0 \\ 6x \geq 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ -2x \geq 0 \\ 3x + 2 > 0 \end{cases}$

Soluzioni: a) $x > 6$ b) $x < -4$ c) Impossibile d) $x \in \left]-\frac{2}{3}\,;0\right]$

Esempio 3.

Talvolta le disequazioni vengono scritte nel seguente modo:

$5 \leq 2x + 3 \leq 13$

L'incognita deve soddisfare le due condizioni, che raggruppo in un sistema di disequazioni:

$\begin{cases} 5 \leq 2x + 3 \\ 2x + 3 \leq 13 \end{cases}$ risolvendo otteniamo: ……

……

……

Il sistema è dunque ……, con ……

Risolvi le seguenti disequazioni, specificando l'insieme soluzione.

a) $1 - 2x < 5 - x < 25 - 6x$ b) $-3 \leq 4 - 7x < 18$ c) $2x - 1 \leq 5 \leq x + 2$

Soluzioni: a) $x \in]-5; 4[$ b) $x \in]-2; 1]$ c) $x \in \{3\}$

Esercizi.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni, specificando l'insieme soluzione sia sulla retta numerica che con gli intervalli, facendo attenzione se l'elemento è compreso oppure no e mettendo l'elemento minore prima!

1) $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x + 6 > 0 \end{cases}$ $[-6 < x \leq 1]$

2) $\begin{cases} -x + 4 < 0 \\ 3x \leq 12 \end{cases}$ [☺ ☺ ☺]

3) $\begin{cases} 4x + 6 \geq 0 \\ 6x > 0 \end{cases}$ $\left[0 < x \leq \frac{3}{2}\right]$

4) $\begin{cases} -x + 1 > 0 \\ 2x \geq 0 \\ -3x + 2 > 0 \end{cases}$ $\left[0 \leq x \leq \frac{2}{3}\right]$

5) $\begin{cases} (x+2)^2 - x(x+2) - 7 \leq 4 \\ 2x - 3 > 1 \end{cases}$ $\left[2 < x \leq \frac{7}{2}\right]$

6) $\begin{cases} 2x - 3 < (x+1)^2 - x(x-1) \\ x + 3 - 2x \geq 4 \end{cases}$ $[-4 < x \leq -1]$

Risolvi i seguenti problemi utilizzando le disequazioni:

1) La somma di tre numeri naturali dispari consecutivi è minore di 27. Determiniamo il massimo valore possibile dei tre numeri. [5, 7, 9]
2) Per quali valori di $x \in \mathbb{N}$ la frazione: $\frac{4x-3}{3x+2}$ diventa:

a) Propria [x > 5] b) Impropria. c) Uguale a 1. d) Nulla.

3) Per noleggiare un'automobile, una compagnia offre due opzioni:
   a) L'opzione A si pagano 15 CHF di quota fissa e 0,20 CHF al km.
   b) L'opzione B prevede 10 CHF di quota fissa e 0,25 CHF al km.

   Determina a partire da quanti km è più conveniente la proposta B. [100 km]

6) Le disequazioni di secondo grado. BM4 pag. 33 es pag. 100. Es. 76 – 81.

Premessa:

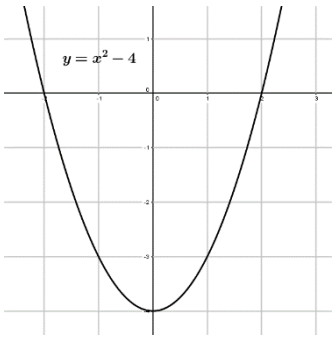
Una disequazione è detta di secondo grado quando l'esponete dell'incognita è 2.

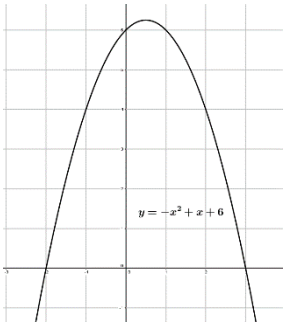
Sappiamo già risolvere un'equazione di secondo grado sia graficamente, …… …… sia algebricamente (per ora), quando il polinomio è scomponibile

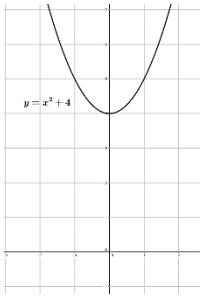
Es.

$x^2 = 4$; $x^2 = x + 6$; $x^2 = -4$

a) Soluzione grafica.







b) Soluzione algebrica.

Ricorda: Per risolvere un'equazione di secondo grado devi sempre …… ……

e poi, quando è possibile, ……

Dunque:

$x^2 = 4$ ……

……

$x^2 = x + 6$ ……

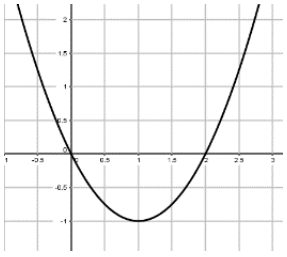
……

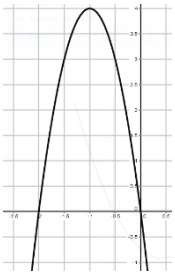
$x^2 = -4$ ……

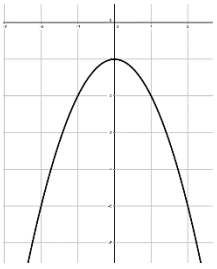
Esercizio.

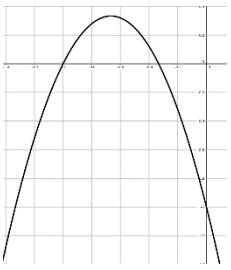
Risolvi graficamente e algebricamente le seguenti equazioni di secondo grado, collegano i rispettivi grafici.

i) ii) iii) iv)









$c: x \mapsto -x^2 - 1$ $d: x \mapsto -3x^2 - 4x - 1$ $b: x \mapsto -4x^2 - 8x$ $a: x \mapsto x^2 - 2x$

Risoluzione algebrica.

……

……

Risolviamo ora le quattro disequazioni:

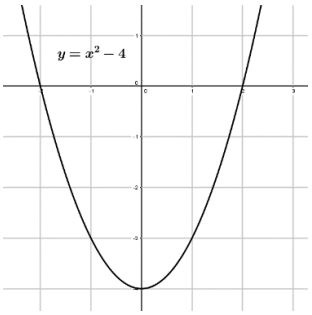
i) $x^2 > 4$ ii) $-x^2 \leq -x - 6$ iii) $x^2 > -4$ iv) $-3x^2 \geq +4x + 1$

Per la risoluzione delle disequazioni di secondo grado abbiamo tre possibili metodi.

a) **La risoluzione grafica:** Stesso procedimento che per l'equazioni, cambia unicamente l'insieme soluzione.

- Risolvo l'equazione uguagliando a zero.
- Determino le soluzioni.
- Schizzo la curva.
- Definisco l'insieme soluzione.

i)



……

……

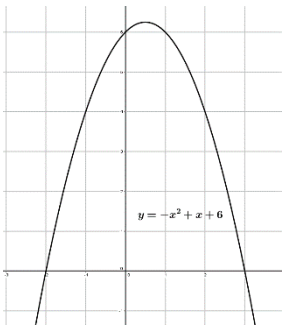
……

……

……

……

ii)



……

……

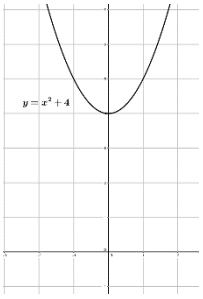
……

……

……

……

iii)



……

……

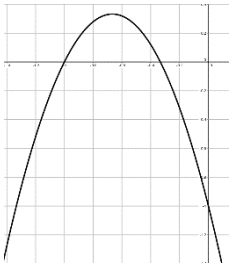
……

……

……

……

iv)



……

……

……

……

……

……

b) La risoluzione algebrica.

Algebricamente possiamo risolvere un sistema di disequazioni in due modi:

i) Con i sistemi di disequazioni.

Ricorda:

- Un prodotto di due fattori è **positivo** se ……

……oppure……

- Un prodotto di due fattori è **negativo** se ……

……

Si tratta di trasformare la disequazione nel seguente modo:

$x^2 > 4$ risolvo rispetto a zero $x^2 - 4 > 0$ **scompongo in fattori** $(x + 2)(x - 2) > 0$

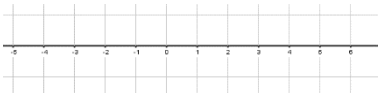
Il prodotto è positivo se ……i fattori sono ambedue……oppure entrambi ……, algebricamente otteniamo i seguenti sistemi:

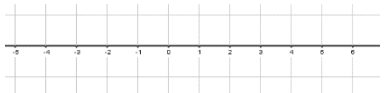
A) $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} x + 2 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$

L'insieme soluzione è dato dall'unione dei Due insiemi e otteniamo:

da cui A) $\begin{cases} x > -2 \\ x > 2 \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} x < -2 \\ x < 2 \end{cases}$

$\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_T$, dunque





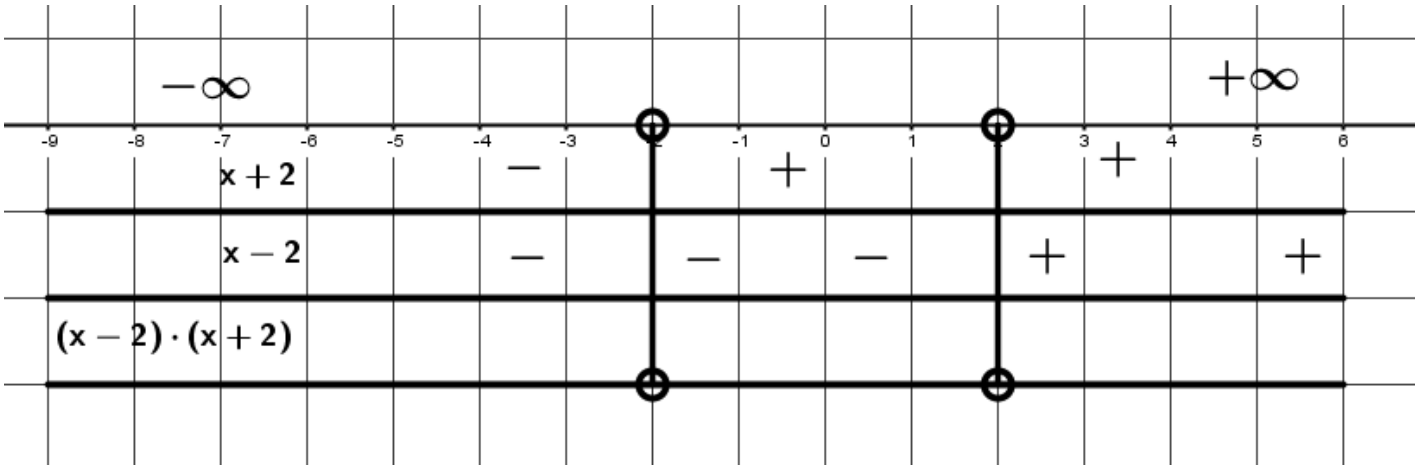
$\mathcal{S}_T = x \in \,]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]+2\,;\,+\infty[$

ii) Con una tabella.

Risolvere: $x^2 > 4$ Procedo come nel metodo precedente:

- $x^2 > 4$ risolvo rispetto a zero $x^2 - 4 > 0$ **scompongo in fattori** $(x+2)(x-2) > 0$

- Verifico per quali valori dell'incognita i fattori sono positivi (oppure negati):
  $x + 2 > 0$ da cui $x > -2$ **e** $x + 2 < 0$ da cui $x < 2$
- Inserisco in una tabella gli intervalli ottenuti, con un colore (rosso) l'intervallo negativo e il blu l'intervallo positivo.



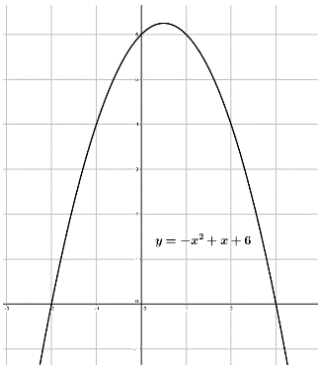
Conclusione:

……

……

Esempi:

a) $-x^2 \leq -x - 6$



i) La risoluzione grafica.

risolvo rispetto a zero …….≤ 0

scompongo in fattori ……..≤ 0

Calcolo i valori che annullano il prodotto:……

Rappresento la parabola e determino l'insieme soluzione.

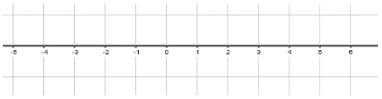
ii) Con i sistemi: essendo il prodotto negativo abbiamo le seguenti due possibilità:

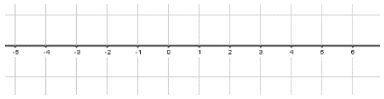
A) $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{cases}$

L'insieme soluzione è dato dall'unione dei Due insiemi e otteniamo:

$\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B$, dunque

da cui A) $\begin{cases} x \ldots\ldots\ldots \\ x \ldots\ldots\ldots \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} x < \ldots\ldots\ldots \\ x < \ldots\ldots\ldots \end{cases}$





$\mathcal{S}_T = x \in \;]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[\cup]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[$

Osservazione: Puoi risolvere la stessa disequazione moltiplicando per (-1) e ottenendo una parabola positiva e due sistemi entrambi positivi o negativi.

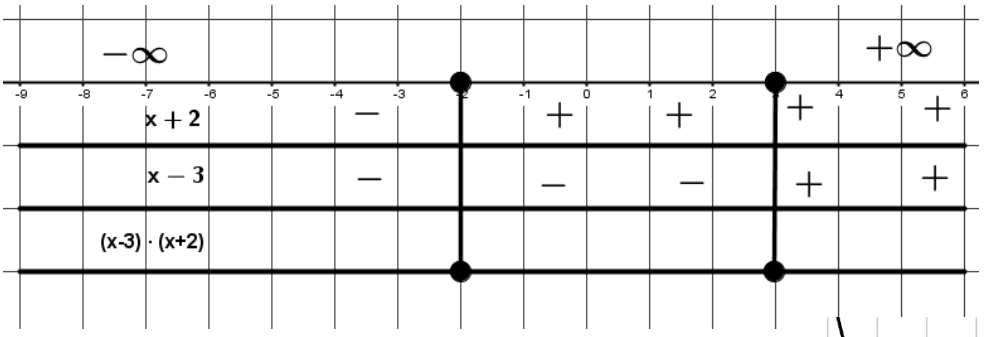
iii) Con la tabella.

$-x^2 \leq -x-6$ risolvo rispetto a zero; $-x^2+x+6 \leq 0$ ¸che posso anche scrivere:

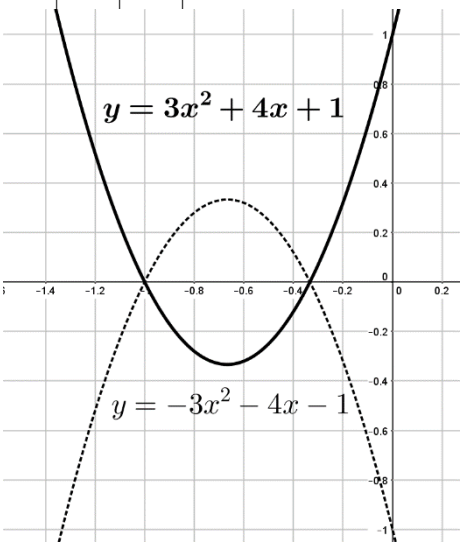
$x^2-x-6 \geq 0$; che scompongo $(x-3)\cdot(x+2) \geq 0$

Da cui segue che $(x-3) \geq 0$; $x \geq 3$; e $(x+2) \geq 0$; $x \geq -2$

Inserisco i dati sia positivi che negativi nella tabella.



Conclusione:



b) $-3x^2 \geq +4x+1$ ottengo $-3x^2-4x-1 \geq 0$

da cui $3x^2+4x+1 \leq 0$

Scompongo $3x^2+3x+x+1 \leq 0$

da cui $(3x+1)\cdot(x+1) \leq 0$

$3x+1=0$; $x=-\frac{1}{3}$ **e** x + 1 = 0 ; x = -1

i) Soluzione grafica:

Schizzi la parabola e determini l'insieme soluzione:

S= ……

ii) Soluzione algebrica:

Definisco i sistemi e risolvo:

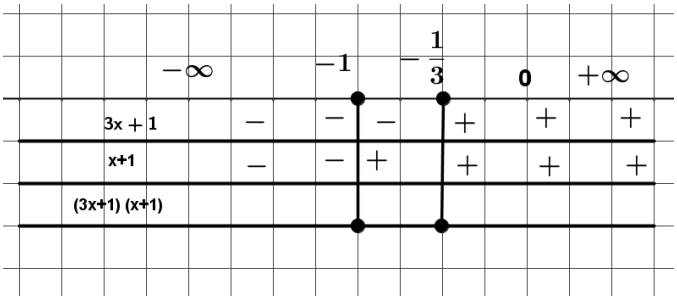
A) $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ottengo

Soluzione:

(1) Sulla retta :……

(2) Con Intervalli: ……

iii) Con la tabella.



Conclusione:……

……

Alcune osservazioni:

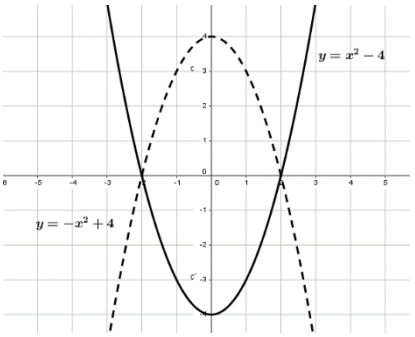
a) Il segno dell'incognita al quadrato è negativo.

Esempio 1

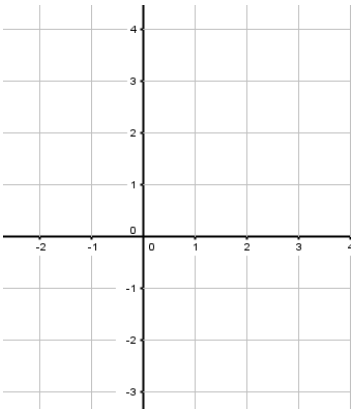
Data: $\mathbf{4 - x^2 \geq 0}$ ordino la disequazione $\mathbf{-x^2 + 4 \geq 0}$ conviene poi moltiplicare per (-1) e rendere il coefficiente di x^2 positivo ottenendo $\mathbf{+x^2 - 4 \leq 0}$

Scompongo i fattori: ……

Insieme soluzione: ……



Esempio 2



Data : $-x^2 \geq -x - 6$;

risolvo rispetto a zero, ottengo: ……,

moltiplico per (-1) ottengo: ……

scompongo in fattori: ……

rappresento graficamente.

Determino l'insieme soluzione: ……

Esercizi: Determina l'insieme soluzione delle seguenti disequazioni.

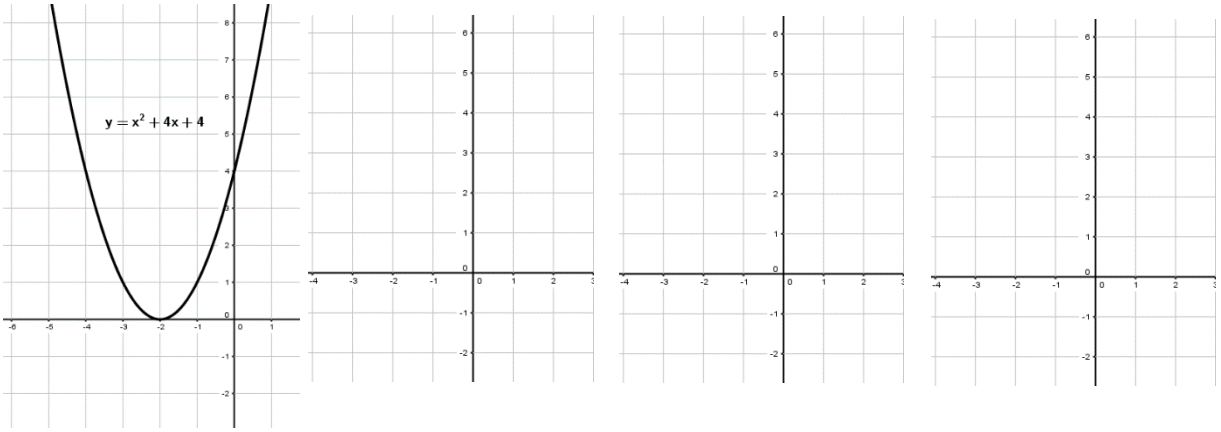
i) $(x - 4)(2x + 3) < 0$ ii) $25 - x^2 \leq 0$ iii) $5 - x^2 \geq 0$

iv) $-6 - 5x - x^2 \leq 0$ v) $(x + 2)(3 - x) > 0$

b) Disequazioni di quadrati perfetti.

Analizza le seguenti situazioni:

$x^2 + 4x + 4 \geq 0$ $x^2 + 4x + 4 > 0$ $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ $x^2 + 4x + 4 < 0$



……. ……. ……. …….

……. ……. ……. …….

……. ……. ……. …….

Esercizi: Determina l'insieme soluzione delle seguenti disequazioni

i) $x^2 - 6x \geq -9$ **ii)** $x^2 \geq 10x - 25$ **iii)** $-x^2 \geq 8x + 16$

7) Disequazioni fratte. BM4 Teoria pag. 34; esercizi pag. 101.

Risolvi con i sistemi e con la tabella la seguente disequazione: $x \cdot (x-1) \geq 0$

a) Con i sistemi:

A) $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots 0 \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots 0 \end{cases}$

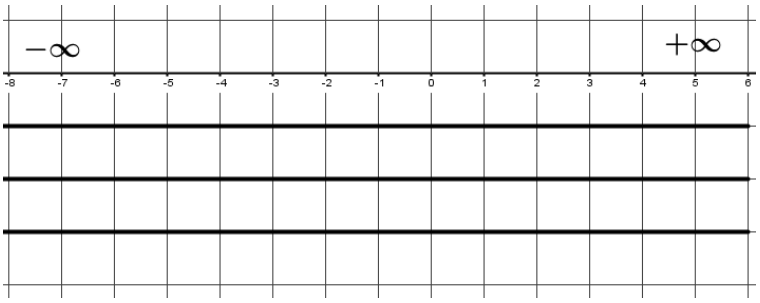
L'insieme soluzione è dato dall'unione dei Due insiemi e otteniamo:

da cui A) $\begin{cases} x \dots\dots\dots \\ x \dots\dots\dots \end{cases}$ oppure B) $\begin{cases} x \dots\dots\dots\dots \\ x \dots\dots\dots\dots \end{cases}$

$\mathcal{S}_T = \mathcal{S}_A \cup \mathcal{S}_B$, dunque

$\mathcal{S}_T = x \in \;]\dots\dots\dots[\dots.\cup\;]\dots\dots\dots\dots\dots\dots[$

b) Con la tabella.



$\mathcal{S} = x \in \;]\dots\dots\dots[\dots.\cup\;]\dots\dots\dots\dots\dots\dots[$

Come potrai risolvere le seguenti disequazioni?

a) $\frac{x}{x-1} \geq 0$

Con i sistemi: Con la tabella:

b) $\frac{x-1}{x} \leq 0$

Con i sistemi: Con la tabella:

c) $\frac{x-1}{x^2-4} \leq 0$

Con i sistemi: Con la tabella:

Esercizi.

Risolvi le seguenti disequazioni fratte di secondo grado.

a) $\frac{x^2}{1-x} \leq 0$ b) $\frac{x^2}{(1-x)^2} \leq 0$ c) $\frac{x^2}{(1-x)^2} \geq 0$ d) $\frac{x^2-1}{2-x} \geq 0$

e) $\frac{x^2-1}{(2-x)\cdot(x+1)} \geq 0$ f) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-9} \leq 0$ g) $\frac{x^2-7x+10}{x^2+6x+8} \geq 0$

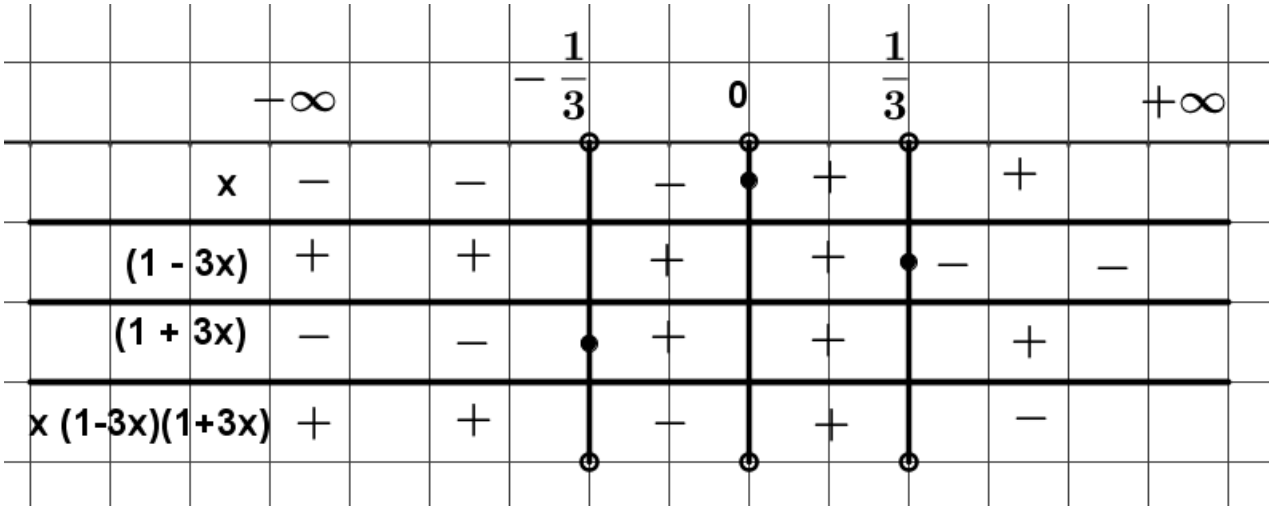
8) Disequazioni di grado superiore al secondo. BM4 pag. 100 es. 77

Esempio 1

Data la disequazione di terzo grado: $x - 9x^3 \leq 0$

Come per le disequazioni di secondo grado scompongo in fattori: ……

Inserisco i dati nella tabella e risolvo nel seguente modo:



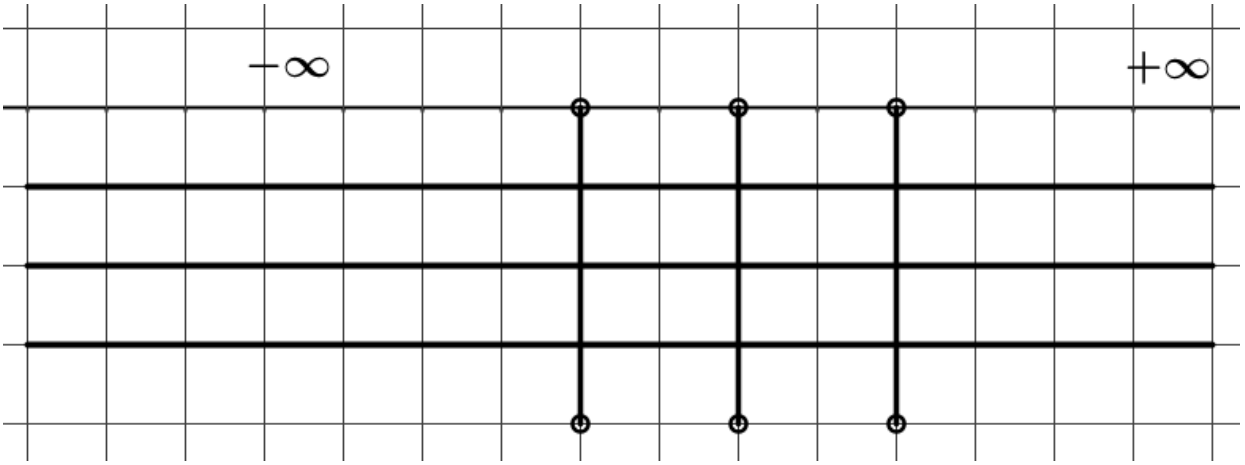
La disequazione è determinata $\mathcal{S} = x \in$]… … … … [… .∪]… … … . . … … … [

Esempio 2.

Data la disequazione di quarto grado: $x^4 - 16 \geq 0$

Come precedentemente scompongo in fattori: ……

Completo la tabella:



La disequazione è determinata $\mathcal{S} = x \in$]… … … … [… .∪]… … … . . … … … [

Esempio 3.

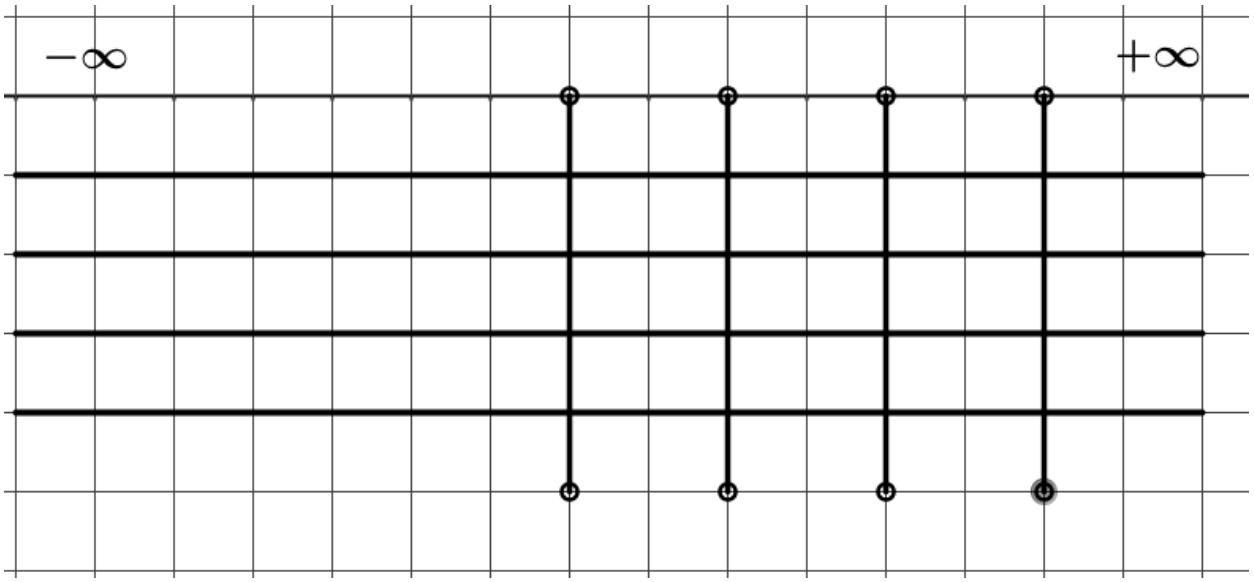
Data la disequazione di quinto grado: $9x^5 - 9x^4 - x^3 + x^2 < 0$

Come precedentemente scompongo in fattori: ……

……

……

Completo la tabella:



La disequazione è determinata $\mathcal{S} = \cdots$ …… ……

Esempio 4.

Come risolverai le seguenti disequazioni?

a) $(x - 9x^3) \cdot x \leq 0$

b) $(x - 9x^3) \cdot (x - 1) \geq 0$

c) $(x - 9x^3)(x^4 - 16) \leq 0$

d) $x^8 - 1 \geq 0$

9) Disequazioni fratte di grado superiore al secondo.

Esempio 1.

Data la disequazione fratta: $\frac{x-9x^3}{x^4-16} \leq 0$

10)