Insieme Numerici.

1) I Numeri Naturali: $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} =$ $\mathbb{N}^* =$

Rappresentazione sulla retta numerica.

Le operazioni con i numeri naturali.

a) Addizione: 234,48 + 87,9 =
b) Sottrazione: 234,48 - 87,9 =
c) Moltiplicazione: 234,48 · 87,9 =
d) Divisione: 234,48 : 1,2 =
e) Elevazione a potenza: 3^4 = ……; 3^0 = …… ; 1^{17} = …… ; 0^{17}= ……; 0^0=……

Le proprietà delle operazioni.

Quali proprietà conosci? Cosa servono?

……

……

Completa la tabella specificando la proprietà utilizzata.

		commutativa
17 + 42 + 23 =		
30 · 30 =		
23 · 12 =		
73 – 48 =		
216 : 18 =		

Ricorda:

La scomposizione in fattori primi.

240 = 24 · 10 = 12 ·2 ·2 ·5 = 4 · 3 ·2^2 · 5 =2^2 · 3 ·2^2 ·5 = 2^4·3 · 5

360=

18000 =

Minimo comune multiplo (mcm) - Massimo Comune Divisore. (MCD)

Esempio:

6 = 2· 3 ; 8 = 2^3

mcm: prendo i fattori comuni con il **massimo esponente** e gli altri, 2^3 · 3= 8 · 3 = 24

MCD : prendo solo i fattori comuni con il **minimo esponente**, 2.

Calcola mcm e MCD tra i seguenti numeri:

6; 10 – 6 ; 18 - 20 ; 60 - 12 ; 18 ; 24 - 3;4 – 56; 72 - 240 ; 360

Problemi m.c.m – M.C.D.

a) Tre scatole contengono tre tipi diversi di frutti; la prima contiene 245 banane, la seconda 105 ananas e la terza 420 kiwi. Si vogliono distribuire in cesti contenenti tutti lo stesso numero di frutti dello stesso tipo, in modo che ciascun cesto ne contenga il maggior numero possibile.

Quanti cesti si possono confezionare con ogni scatola? Quanti frutti conterrà ogni cesto? [35 cesti, 7 banane, 3 ananas, 12 Kiwi]

b) Tre automobilisti effettuano una corsa di formula 1 su una pista circolare; partono contemporaneamente e procedono con velocità costante. Il primo compie un giro ogni 56 secondi, il secondo ogni 48 secondi, ed il terzo ogni 42 secondi.

i) Dopo quanto tempo (minuti e secondi) passeranno tutti e tre contemporaneamente dal traguardo?

ii) quanti giri avrà fatto ciascun pilota? [5 min. 36 sec., 6, 7, 8]

Le proprietà delle potenze in $\mathbb{N}$.

Applicandole correttamente le operazioni fra potenze possono essere semplificate.

P R O P R I E T A `	**Calcola**:
Prodotto di potenze di <u>uguale base</u> $a^n \cdot a^p = a^{n+p}$	$3^2 \cdot 3^3$ = ...; $2^3 \cdot 2^4$ = ... $10^2 \cdot 10$ = ...; $7^5 \cdot 7^8$ = ... $X^2 \cdot x^3$ = ...; $a^5 \cdot a^8$ = ... $x^2 \cdot x^3 \cdot x^6$= .....; $3x^4 \cdot 2x^5$ =.....;
Quoto di potenze di <u>uguale base</u> Se $n \geq p$ $a^n : a^p = a^{n-p}$ $a^n : a^n = a^{n-n} =$ $a^0 = 1$	$2^5 : 2^3$ = ...; $x^5 : x^3$ = ...; $6^7 : 6^4$ = ...; $m^6 : m^4$ = ...; $10m^6 : 2m^4$ = ...; $12x^8 : 3x$ = ...; $10^5 : 10^5$ =.....; $b^8 : b^8$ =.....; $(8^7 : 8^2) : 8^3$ = ... $3^8 : 3^7 \cdot 3^2$ = ... $(30y^{20} : 2\,y^{13}) : 5y^2$= .....
Potenza di una potenza $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$	$(2^2)^3$ = ...; $(3^2)^4$ = ... $(10^2)^3$ = ...; $(x^2)^4$ = ... 25 = ... ; $(25^2)^4$ =..... $(27^2)^5$ =.....: $(64^3)^5$ =..... $(5^2)^3 + 5^6$ = ...
Prodotto di potenze con <u>esponenti uguali</u> $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 3^3$ = ... $10^2 \cdot 5^2$ = ... $x^2 \cdot y^2$ = ... $30^2 = (3 \cdot 10)^2$ = ... $7^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ = ...

Quoto di potenze con <u>esponenti uguali</u>	$49^3 : 7^3$ = ...
$a^n : b^n = (a : b)^n$	$1'000^2 : 125^2$ = ...
	$15x^4 : 5x^4$ =.....
	$3^4 : 3^4$ = ...; $x^m : x^m$ =

Calcola applicando, se possibile, le proprietà delle potenze.

520 $10^2 \cdot [(3^2 : 7^0 \cdot 5^2) : 5^2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 - (8^3)^0] : (2^2 \cdot 5)$ [200]

521 $2 \cdot 3^3 - [2^2 \cdot (26^4 : 13^4) : (4^3 : 2^3) + 3^2 \cdot 2^3] : 2^2$ [34]

522 $5^2 \cdot \{[8^2 \cdot (2^3 \cdot 2^2)^2] : 16^2 : 4^2\}^2 : 4^3 - 11 \cdot 3^2$ [1]

523 $\{[(24^2)^3]^3 : (12^4)^4 : [(2^2)^3 \cdot 2^5]^2 - 2^0\} \cdot [(25^4 : 5^4 - 25^2)^{15} + (25^3)^2 : (5^2)^4 : 5^3]$ [40]

524 $\{[(19^5 - 19^3) : 19^3 - (17^4 - 17^3 + 17^2) : 17^2 + 3]^2 : 18^2 + (2^5 - 3^3)^2\}^2$ [2500]

525 $[(16^4 + 12^4 - 8^4) : 4^4 - (2^2)^2] - (5^2 + 7^2) + (3^2 + 2^2) \cdot 2^2 - [2^2 \cdot (2^2)^3 + 3^3]$ [0]

L' equazioni.

Risolvi in $\mathbb{N}$ le seguenti equazioni, cosa noti?

$x + 6 = 32$ $24 = 2x$

Risolvi in $\mathbb{N}$ le seguenti equazioni, cosa noti?

$x + 6 = 2$ $2x = -24$ $2x = 7$

Conclusione: .....

2) I Numeri Interi Relativi: $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ =

Rappresentazione sulla retta numerica:

Le operazioni e il problema dei segni:

L'addizione e la sottrazione.

Completa le seguenti tabelle:

+	+4	+23	-13
+2			
-12			
-7			

-	+4	+23	-13
+2			
-12			
-7			

a) Con le lettere, procedi allo stesso modo.

$(-13x) + (+12x) =$; $(-16m^3) + (-12m^3) =$; $(-16x^2y) + (-21x^2y) =$

$(+16ab^3) - (-12ab^3) =$; $(-16mn) - (+12mn) =$; $(-16y) - (-21y) =$

b) Con le frazioni, procedi allo stesso modo, ma attenzione ai segni!

$(+\frac{1}{2}x) + (+\frac{1}{4}x) =$; $(+\frac{1}{4}m^3) + (-\frac{5}{6}m^3) =$; $(-\frac{1}{6}x^2y) + (-\frac{1}{9}x^2y) =$

$(+\frac{1}{4}ab^3) - (-\frac{1}{8}ab^3) =$; $(-\frac{1}{5}mn) - (+\frac{1}{10}mn) =$; $(-\frac{10}{24}y) - (-\frac{27}{81}y) =$

La moltiplicazione.

*	-4	+7	-13
+2			
-11			
-9			

*	-3		-12
	-15		
-6		-48	
-13			

Con le lettere procedi allo stesso modo per la parte numerica ed utilizza le proprietà delle potenze per la parte letterale.

$(-3x) \cdot (+2x) =$; $(-6m^3) \cdot (-12m^3) =$; $(-3x^2y) \cdot (-21x^2y) =$

$(+6ab^3) \cdot (-2ab^3) =$; $(-13mn) \cdot (+2mn) =$; $(-7y) \cdot (-3y) =$

La divisione.

:	-30	8	-12
2			
3			
-4			

:	-24	32	
	-12		
3			-34
		-8	

Con le lettere procedi allo stesso modo per la parte numerica ed utilizza le proprietà delle potenze per la parte letterale.

$(-30x^6) : (+2x) =$; $(-60m^5) : (-12m^3) =$; $(-63x^7y^4) : (-21x^5y) =$

$(+16a^2b^3) : (-2ab^3) =$; $(-36m^4n^7) : (+4mn^7) =$; $(-27y) : (+3y) =$

L'elevazione a potenza.

a) Calcola:

$(-4)^2 =$; $-4^2 =$; $(+7)^3 =$; $(-7)^3 =$; $-7^3 =$; $(-1)^{32} =$; $(+1)^{32} =$; $-1^{32} =$;

Con le lettere procedi allo stesso modo, ma ricordati delle proprietà delle potenze.

$(-4x)^2 =$; $(+7x^2)^3 =$; $(-7x^2)^3 =$; $(-2x^2y^3)^2 =$; $(-2x^2y^4)^3 =$

b) Trascrivi la potenza cambiando la base.

$(+4)^2 =$; $(-4)^2 =$; $-4^2 =$; $(-9)^2 =$; $-9^2 =$; $-25^4 =$; $(-49)^3 =$; $(-25)^4 =$;

L' equazioni

Risolvi in $\mathbb{Z}$ le seguenti equazioni, cosa noti?

$x - 6 = -32$ $\qquad$ $2x = -24$

Risolvi in $\mathbb{Z}$ le seguenti equazioni, cosa noti?

$3x + 6 = 2$; $\qquad$ $5x = -24$; $\qquad$ $2x = 7$

Conclusione: ……

3) I Numeri Razionali: $\mathbb{Q}$ - Le frazioni e non solo……

Un numero è detto razionale se è possibile definirlo sotto forma di frazione.

I numeri razionali si presentano sotto diverse forme, che vedremo di conoscere.

La frazione: $\frac{\text{Numeratore}}{\text{Denominatore}} =$

Una frazione ha significato se il denominatore è **DIVERSO** da **ZERO**!

Espressioni del tipo $\frac{4}{0}$ oppure $\frac{2x}{0}$ non hanno senso! Motiva il perché!

……

Es. Determina per quali valori della variabile la frazione perde di significato:

$\frac{2}{x}$; $\frac{2}{x+1}$ $\frac{2}{x-1}$; $\frac{2}{3x}$; $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{b-2}$; $\frac{a+3}{b-2}$

Ricorda una frazione è:

a) Una parte d'un intero, frazione **propria**: $\frac{3}{4}$ prendo 3 parti su 4
oppure: $\frac{5}{4}$ prendo 5 parti su 4, frazione **impropria**, ho bisogno più d'un intero.
oppure: $\frac{12}{4}$ prendo 12 parti su 4, frazione **apparente**, prendo un multiplo.

es. Dividi il segmento AB in 5 parti congruenti, utilizzando solo il compasso e la riga.

b) Un insieme di divisioni equivalenti:

$\frac{3}{4} = \left\{\frac{6}{8}; \frac{9}{12}\right.$; $\qquad$ …….$\frac{3a}{4a}; \frac{3x^2}{4x^2}$ …… $\left.\right\}$ con a; x; ……. da zero.

$\frac{2}{5} = \left\{\frac{4}{10}; \frac{2x}{5x}\right.$; $\qquad$ $\left.\right\}$

$\frac{a}{b} = \left\{\frac{2a}{2b}; \frac{9a}{9b}\right.$; $\qquad$ $\left.\right\}$

$\frac{x^2}{4y} = \left\{\frac{2x^2}{8y}; \frac{3x^2}{12y}\right.$; $\qquad$ $\left.\right\}$

Per determinare una o più frazioni equivalenti devo:
amplificare la frazione moltiplicando numeratore e denominatore per lo stesso numero, applicando la proprietà invariantiva della divisione:
Amplifica le seguenti frazioni per il numero considerato:

Osservazione:
Il prodotto in croce di due frazioni equivalenti è uguale:
$\frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2}{d_2}$ ===> $n_1 \,.\, d_2 = n_2 \,.\, d_1$ Esempio $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ====>

Conseguenza: Per confrontare due frazioni posso utilizzare il prodotto in croce.

Esercizio: Amplifica le seguenti frazioni per il numero dato.

Frazione	2	4	x	3a	2ab	a^2
$\frac{1}{2}$						
$\frac{5}{3}$						
$\frac{a}{2}$						

L'operazione inversa dell'amplificazione d'una frazione è la **semplificazione**, sfruttando la proprietà **invariantiva** della divisione, divido entrambi i membri per lo stesso numero, quando non posso più dividere dirò che la frazione è **ridotta ai minimi termini**.
Esempio: Con le lettere si procede allo stesso modo:

$\frac{48}{60} = \frac{24}{30} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$; $\frac{4b}{2b^2} = \frac{2b}{b^2} = \frac{2}{b}$; $\frac{x^3y^5}{x^4y^2} = \frac{y^5}{xy^2} = \frac{y^3}{x}$

È possibile sfruttare la scomposizione in fattori primi d'un numero per semplificare una frazione.
$\frac{120}{280} = \frac{2^3.3.5}{2^3.5\,.7} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{3}{7}$; $\frac{8000}{3200} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{80}{32} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{5}{2}$; $\frac{3^4.5^2.7^3}{3^5.5^2.7} = \frac{\quad}{\quad}$

Es. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:
$\frac{84}{1764} =$; $\frac{2^3.5^4.}{2\,.5^6} =$; $\frac{27x}{15y} =$; $\frac{27x^3y^2}{15x^4y} =$; $\frac{(a+b)}{2\,.(a+b)} =$; $\frac{a+b}{b} =$; $\frac{\pi}{2\pi} =$

c) Il segno di una frazione.
Valgono le regole dei segni viste nella divisione con i numeri interi relativi $\mathbb{Z}$.
(+ 2) : (- 5) = $\frac{+2}{-5} = -\frac{2}{5}$
Es. Determina il segno delle seguenti frazioni.
$\frac{-2}{-5}$ =……;$\frac{-2}{+5}$ =……; $\frac{-25}{-15}$ =……=……= $\frac{-a}{+2b}$ =……; $\frac{-6ab}{-2b^3}$ =……;$\frac{0}{-5}$ =……;

d) Frazioni e numeri decimali:
Una frazione può essere scritta come una divisione e otteniamo:
i) Un numero decimale finito:
$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$ $\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$

ii) Un numero decimale periodico:

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0,\overline{3}$ $\frac{1}{7} = 1 : 7 = 0,\overline{142857}$

Osservazione: La calcolatrice approssima sempre l'ultima cifra! Es : $\frac{8}{7}$ =

Ricerca: Sapresti individuare le frazioni che generano un numero decimale finito e quelle che generano un numero decimale periodico?

iii) La trasformazione d'un numero decimale finito in frazione. (pag. 17)

0,8 = $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; 1,24 = ……. ; 1,243 = ……. ;

iv) La trasformazione d'un numero decimale periodico in frazione. (pag. 18)

Sappiamo già che: $0,\overline{2} = \frac{2}{9}$; $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$ ma $0,\overline{9} = 1$; $0,\overline{23} = \frac{23}{99}$ $0,\overline{748} = \frac{748}{999}$

Cosa capita se ho: $0,1\overline{2}$ = ; $0,2\overline{3} =$; $0,74\overline{8} =$

Negli altri casi possiamo procedere nei seguenti modi:

Esempio: devo calcolare la frazione generatrice di $1,\overline{2}$

Esercizi: scrivi sotto forma di frazione i seguenti numeri razionali:

3,5 - $3,\overline{5}$ – 3,56 - $3,\overline{56}$ - $3,5\overline{6}$ - $3,45\overline{6}$ - $30,1\overline{05}$ -$1,\overline{9}$ - $9,\overline{9} - 19,\overline{9}$ - $1,2\overline{9}$ 😊

v) La percentuale.

La percentuale è una frazione con denominatore cento, scritta sotto forma particolare.

Es: $\frac{35}{100}$ = 35 % : $\frac{120}{100}$ = ; $\frac{1,2}{100}$ = ; $\frac{x}{100}$ =

Trasformazione di una frazione in percentuale:

Abbiamo due possibilità:

a) Determinare la frazione equivalente con denominatore 100: es :

$\frac{5}{4}$ = ; $\frac{1}{3}$ =

b) Trasformare la frazione in decimale, moltiplicando numeratore e denominatore per 100 : es : $\frac{5}{4}$ = $\frac{1}{3}$ =

Trasformazione di una Percentuale in frazione:

Scrivo la percentuale sotto forma di frazione e riduco ai minimi termini.

80% = $\frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{15}$; 10% = ……. ; 120% = ……

vi) Il numero misto.

Es : $7\frac{1}{2}$ = 7+ $\frac{1}{2}$ = $=\frac{15}{2}$; $2\frac{3}{4}$ = ; $9\frac{5}{6}$ = ;

Trasformazione d'un decimale in numero misto:

4,5 = 4 + 0,5 = 4 + $\frac{1}{2}$ =$4\frac{1}{2}$; $\mathbf{1,\overline{32}} = \mathbf{1} + \mathbf{0,\overline{32}} = \mathbf{1} + \frac{32}{99} = \mathbf{1}\frac{32}{99}$

Trasformazione di una frazione in numero misto:

$\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2+\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$; $\frac{20}{7}$ =

vii) Numeri misti – percentuale – decimale.

Come trasformerai in frazione e in decimale $7\frac{1}{2}$% ? $2\frac{3}{4}$% ? $5\frac{1}{3}$% ?

viii) Misure di tempo, frazioni e decimali.

a) Le ore.

4h 30 mi = 4 h + $\frac{30}{60}$h = 4 h + $\frac{1}{2}$h = $\frac{8+1}{2}$ h = $\frac{9}{2}$h = 4$\frac{1}{2}$ h = 4,5h

Trasforma in frazione, numero misto e decimale.

2h 30 s = ; 6h 45 min = ;6 h 45 min 30 s = ; 2 h 3min 23s = ; 7h 57 min 39 s =

b) Gli anni

1 y 6 m = 1y + $\frac{6}{12}$y = 1y + $\frac{1}{2}$y = $\frac{2+1}{2}$ y = $\frac{3}{2}$y = 1$\frac{1}{2}$ y = 1,5 y

Trasforma in frazione, numero misto e decimale.

2y 15 d = ; 6 y 8 m = ; 6 y 8 m 15 d= ; 6 y 8 h = ; 7y 8 m 14d 10 h =

ix) Opposto - inverso (reciproco) d'una frazione.

L'opposto di un numero:

cambi il segno: es – 4 è opposto . di ….. ; + $\frac{3}{4}$ è opposto di ….. ; 0 opposto …..

L'inverso di un numero : es. + $\frac{3}{4}$ l'inverso è + $\frac{4}{3}$; l'inverso di - $\frac{5}{8}$ è ……

L'inverso di + 5 è ……; L'inverso di + 1 è ……; L'inverso di - 1 è ……;

x) Rappresentazione di coordinate, date con frazioni, sul piano cartesiano.

Dati A $\left(-\frac{17}{4}\ ;\ +\frac{5}{2}\right)$; B $\left(-\frac{9}{4}\ ;\ -\frac{11}{4}\right)$; C (2; 0)

i) Rappresenta i tre punti sul piano cartesiano con u = 4q.

ii) Calcola l'area del triangolo ABC.

iii) Calcola il perimetro del triangolo ABC.

Operare con i numeri razionali.

1) **Riduci le seguenti frazioni** ai minimi termini, dopo aver scomposto numeratore e denominatore in fattori primi:

Esempio: $\frac{8}{24} = \frac{2^3}{2^3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$; $\frac{24}{54}$ = …… ; $\frac{204}{450}$ = ……

Con le lettere procedo allo stesso modo: $\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$; $\frac{2a^3}{10a^5}$ = ……

Quale proprietà delle operazioni ti permette di semplificare una frazione?……

Esercizi: riduci ai minimi termini le seguenti frazioni:

a) $\frac{15}{18}$; $\frac{12}{30}$; $\frac{72}{48}$; $\frac{160}{120}$ b) $\frac{2^3}{2^4}$; $\frac{3}{3^2}$; $\frac{5^4}{5^2}$; $\frac{2^3 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^2}$ c) $\frac{2}{2a}$; $\frac{3a}{;4a}$; $\frac{x^3}{x^4}$; $\frac{4x^3}{2x^4}$

2) Confronto di frazioni riducendole allo stesso denominatore.

$\frac{5}{3}$ … … … … …$\frac{20}{12}$; $\frac{13}{9}$ … … … …$\frac{9}{7}$; $\frac{5}{8}$ … … … …$\frac{4}{7}$; $\frac{9}{8}$ … … … …$\frac{7}{6}$;

3) **Addizione – sottrazione di numeri razionali**. BM3 pag. 20 – 22.

a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$ b) $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=$ c) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$

d) $\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=$ e) $\frac{5}{3}-\frac{7}{3}=$ f) $-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=$

g) $\frac{11}{2}-\frac{5}{6}=$ h) $\frac{5}{6}-\frac{11}{2}=$ i) $\left(\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=$

j) $\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=$ k) $-\frac{2}{a}+\frac{1}{a}=$ l) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{4a}=$

m) $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=$ n) $-\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}=$ o) $-\frac{2b}{4a}+\frac{a}{6b}=$

Chiaramente se avessimo un'altra forma del numero razionale, trasformiamo in frazione e svolgiamo i calcoli.

Esempi:

a) $1{,}2+\ 2{,}5=$ b) $1{,}2-\ 2{,}5=$ c) $1,\overline{2}+\ 2,\overline{5}=$

d) $31,\overline{32}-\ 12,\overline{5}=$ e) $2{,}0\overline{9}+1,\overline{9}$ f) $-2{,}2\overline{3}-1{,}23\overline{4}=$

g) $3\frac{1}{4}+2\frac{3}{5}=$ h) $2{,}8\ \mathrm{h}-1,\overline{6}\ \mathrm{h}$ i) $3\frac{1}{4}\mathrm{h}-2\frac{3}{5}\mathrm{h}=$

Problemi con addizione e sottrazione di frazioni.

a) Nel portamonete ho 160 CHF, spendo prima i $\frac{2}{5}$, poi $\frac{1}{4}$ e da ultimo $\frac{1}{8}$ dell'importo. **Quale parte** della somma ho speso? **Quale parte** della somma mi rimane? **Quale somma** mi rimane? Che percentuale rappresenta la somma rimasta? [$\frac{9}{40}$; 36 CHF; 22,5%]

b) Nel portamonete ho 160 CHF, spendo prima i $\frac{2}{5}$, poi $\frac{1}{4}$ del rimanente. Quale somma ho speso in ogni occasione? **Quale somma** mi rimane? **Quale parte** della somma mi rimane? Che percentuale rappresenta la somma rimasta? [72 CHF; 45%]

c) Ho speso 160 CHF; calcola la somma che avevo inizialmente nel mio borsellino sapendo che rappresentano i $\frac{2}{5}$.

d) D'una tratta di 480 km, percorro prima il 20% ed inseguito il 50%; quale parte del tragitto mi rimane da percorrere? Quanti km sono? [$\frac{3}{10}$; 144 km]

e) D'una tratta di 480 km, percorro prima il 20% ed inseguito il 50% della parte rimanente; quale parte del tragitto mi rimane da percorrere? Quanti km sono? [$\frac{2}{5}$; 192 km]

f) Ho 100 CHF e ogni giorno ne spendo la metà; dopo quanti giorni non avrò più un centesimo? 😊

g) Una scatola contiene tre triangoli, cinque quadrati e sette rombi. Calcola qual è la probabilità di:

i) Estrarre un triangolo. ii) Estrarre un quadrato.

iii) Estrarre un quadrato **oppure** un rombo. iv) Estrarre un quadrato **e** un rombo.

h) Una lumaca deve salire un muretto alto tre metri; sapendo durante il giorno percorre la metà del tragitto restante e durante la notte scivola d'un quarto del tragitto percorso. Dopo quanti gironi raggiungerà la cima?

4) Moltiplicazione di frazioni.

Osservazione: Anche nell'insieme dei numeri razionali,$\mathbb{Q}$,valgono le ……note regole dei segni viste nell'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$.

Esempi:

$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(+5) = -\frac{3\cdot5}{4\cdot1} = -\frac{15}{4}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5}{2}\right) = -\frac{3\cdot5}{4\cdot2} = -\frac{15}{8}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = +\frac{3\cdot2}{4\cdot5} = -\frac{6}{20} = -\cdots..$;

Osservazione: in alcune situazione, conviene semplificare prima di svolgere la moltiplicazione. Esempio: $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = +\frac{3}{2\cdot5} = -\frac{3}{10}$

Regola: per moltiplicare due frazioni ……

……

Esegui le seguenti moltiplicazioni tra numeri razionali.

a) $\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right) =$ b) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5}{9}\right) =$ c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\right) =$

d) $\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{8}{9}\right) =$ e) $(+2)\cdot\left(+\frac{5}{9}\right) =$ f) $\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot(-3) =$

Con più termini posso semplificare tutte le frazioni:

a) $\left(+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(+\frac{7}{2}\right) =$ ……

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5}{9}\right)\cdot\left(+\frac{8}{15}\right) =$ ……

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{10}{9}\right)\cdot\left(-\frac{8}{15}\right)\cdot\left(+\frac{9}{12}\right) =$ ……

Con **le lettere** procedo allo stesso modo.

Esempio:

$\left(+\frac{1}{4}\,a\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}b\right) = \left(+\frac{a}{4}\right)\cdot\left(-\frac{5b}{9}\right) =$……

$\left(-\frac{3}{4}\,a^3\right)\cdot\left(+\frac{5}{9}a^5\right) = \left(-\frac{3a^3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5a^5}{9}\right) =$……

Esegui e seguenti moltiplicazioni.

a) $\left(+\frac{2}{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) =$ b) $\left(-\frac{3x}{4a^3}\right)\cdot\left(+\frac{5x^2}{9a^5}\right) =$ c) $\left(+\frac{2b^3}{a^4}\right)\cdot\left(-\frac{a^7}{6b^5}\right) =$

d) $\left(-\frac{3x}{4a^3}\right)\cdot\left(+\frac{8a^2}{9ax^5}\right) =$ e) $\left(+\frac{1}{4}\,a\right)\cdot\left(-\frac{5}{9}b^2+\frac{8}{3}b\right) =$

Con **i numeri decimali periodici**, trasforma in frazione e calcolo:

Esempio:

$\left(-\frac{9}{2}\right) \cdot (+2,\overline{3}) =$ ……

$(+3,3\overline{3}) \cdot (+2,\overline{3}) =$ ……

$\left(-\frac{9}{2}\right) \cdot \left(+\frac{2,\overline{3}}{7}\right) =$ ……

Esegui le seguenti moltiplicazioni.

a) $(+2,\overline{3}) \cdot 3 =$ b) $(-2,0\overline{3}) \cdot 3 =$ c) $(+2,\overline{9}) \cdot 3 =$ d) $(-2,0\overline{9}) \cdot 3 =$

e) $(-2,0\overline{9}) \cdot (+2,\overline{9}) =$ f) $\left(+\frac{8,\overline{9}}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(-\frac{4,\overline{4}}{2,\overline{9}}\right)$

5) Elevazione a potenza di numeri razionali.

Ricorda: $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = (+9)$; $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-27)$

Con i numeri razionali valgono le ……note regole dei segni viste con i numeri interi relativi ($\mathbb{Z}$) e chiaramente le ……note proprietà delle ……

Dunque: $\left(+\frac{2}{3}\right)^2 =$……

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 =$……

$(-1,\overline{2})^3 =$……

$\left(+3\frac{1}{5}\right)^2 =$ ……

Con le lettere come procederò?

$\left(-\frac{3}{a}\right)^2 =$…… $\left(-\frac{3b^3}{5a^2}\right)^3 =$……

Regola: ……

……

Calcola il valore delle seguenti potenze.

$\left(+\frac{5}{4}\right)^2 =$……; $\left(-\frac{5}{4}\right)^2 =$……; $\left(-\frac{5}{4}\right)^3 =$……;$\left(-\frac{x}{4}\right)^2 =$……;

$\left(-\frac{x}{4}\right)^3 =$……;$\left(-\frac{3x}{5y^2}\right)^2 =$……;$\left(-\frac{3x}{5y^2}\right)^3 =$……;$\left(-\frac{3^2x^4}{5^3y^2}\right)^3 =$……;

Le proprietà delle potenze con i numeri razionali.

Come già visto con i numeri **Naturali ($\mathbb{N}$)** e con i numeri **interi relativi ($\mathbb{Z}$),** anche con i numeri razionali **($\mathbb{Q}$)** valgono le ……note proprietà:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) =$……; ma $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) =$……;

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^3 =$……; ma $\left(+\frac{3}{4}\right)^5 : \left(-\frac{3}{4}\right)^3 =$……;

c) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^5\right]^2 =$……; ma $\left[\left(-\frac{27}{8}\right)^5\right]^2 =$……;

d) $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)^5 =$……; ma $\left(-\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(+\frac{8}{9}\right)^5 =$……;

e) $\left(-\frac{10}{9}\right)^5 : \left(-\frac{8}{15}\right)^5 =$……;ma $\left(+\frac{10}{9}\right)^5 : \left(-\frac{8}{15}\right)^5 =$……;

Semplifica le seguenti espressioni, sfruttando le ……note proprietà:

- $\left[\left(-\frac{18}{5}\right)^8 : \left(-\frac{6}{5}\right)^8\right]^3 : \left[(-24)^5 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^5\right]^4 : \left[\left(+\frac{1}{3}\right)^2\right]^6 =$ $[(+3)^{16}]$
- $\left[\left(-\frac{9}{4}\right)^6 : \left(-\frac{3}{4}\right)^6\right] \cdot [(+3)^2]^4 : \left[\left(-\frac{18}{5}\right)^7 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)^7\right]^2 =$ $[1]$

6) La divisione di numeri razionali. BM3 pag. 26.

Premessa:

Determina la frazione opposta e la frazione inversa.

$+\frac{3}{4}$ opposta……inversa……; $-\frac{7}{5}$ opposta……inversa……

$+\frac{3x}{4y}$ opposta……inversa……; $-\frac{7x^2y^4}{5a^5b^7}$ opposta……inversa……

Osservazione:

i) Sommando due numeri opposti cosa ottieni?……

ii) Moltiplicando due numeri l'uno inverso dell'altro, cosa ottieni?……

La divisione di frazioni.

Esempio: $\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$

Oppure semplificando: $\left(-\frac{3}{4}\right) : \left(+\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{2}{5}\right) = -\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{10}$

Regola: ……

……

Esegui le seguenti divisioni:

a) $\left(-\frac{2}{5}\right) : \left(+\frac{1}{5}\right) =$

b) $\left(+\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{4}{3}\right) =$

c) $\left(+\frac{10}{28}\right) : \left(-\frac{42}{30}\right) =$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right) : (+4) =$

e) $(+4) : \left(-\frac{2}{5}\right) =$

f) $\left[\left(+\frac{15}{16}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)\right] : \left(+\frac{3}{4}\right) =$

g) $\frac{+\frac{3}{4}}{-5} =$

h) $\frac{-3}{-\frac{4}{5}} =$

i) $\frac{-\frac{3}{4}}{+\frac{5}{2}} =$

Con le lettere si procede allo stesso modo:

$\left(-\frac{2a}{b}\right) : \left(+\frac{a^2}{5b}\right) = \left(-\frac{2a}{b}\right) \cdot \left(+\frac{5b}{a^2}\right) = -\frac{2 \cdot 5}{a} = -\frac{10}{a}$

Semplifica le seguenti espressioni

a) $\left(-\frac{2a}{b^5}\right):\left(+\frac{a^2}{5b^3}\right)=$

b) $\left(-\frac{2x^3}{5y}\right):\left(-\frac{6x^7}{15y^3}\right)=$

c) $\left(+\frac{16a^4}{15b^7}\right):\left(-\frac{4a^2}{5b^3c}\right)=$

d) $\left(-\frac{10x^2y^4}{28a^3b^5}\right):\left(-\frac{42x^2y^5}{30a^6b^7}\right)=$

7) Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left[\left(\frac{12}{8}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4:\left(\frac{3}{2}\right)^6\cdot\frac{3}{2}\right]^4:\left(2-\frac{1}{2}\right)^4+\left[-\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{9}\right]:\left(-\frac{5}{3}\right)^2=$ $\left[\frac{2}{5}\right]$

b) $-x^3y+2xy\cdot\left(-\frac{2}{3}x^2\right)+6x^2\cdot\left(-\frac{3}{8}xy\right)-y\cdot\left(-2x^3-\frac{1}{4}x^3\right)=$ $\left[-\frac{7}{3}x^3y\right]$

c) $\left(-7x^3y^2+\frac{9}{2}x^3y^2\right):\left(3x^2y^2+\frac{3}{4}x^2y^2\right)=$ $\left[-\frac{2}{3}x\right]$

8) L'equazioni con i numeri razionali.

L'introduzione dei numeri razionali ci permette ora di risolvere delle equazioni che nell'insieme dei numeri Naturali $\mathbb{N}$ e in quello dei numeri Interi $\mathbb{Z}$ non era possibile.

Risolvi le seguenti equazioni con i numeri razionali $\mathbb{N}$, specificando l'insieme soluzione.

a) $x-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$

b) $2x-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}=\frac{2}{5}$

d) $x+2,\overline{4}=\frac{2}{3}$

e) $1,\overline{2}x+2,\overline{4}=\frac{2}{3}$

f) $1,\overline{2}x+2,\overline{4}=4\frac{2}{9}$

9) La percentuale.

Ricorda la forma percentuale d'un numero equivale ad una frazione con ……cento.

Es. 3% = ……= ……; 1,2 % ……= ……; 0,2 %= ……= ……;

Trasforma le seguenti forme di numero razionale in percentuale

3,4 = ……; 0,07 =……; $2,\overline{5}$ =……;$2,3\overline{5}$ =……; $5\frac{2}{3}$ =……;

Situazioni dove utilizziamo la percentuale.

a) **Confrontare** due o più situazioni.

Due giocatori di pallacanestro: Aldo e Giovanni (Giacomo è ammalato).

Aldo ha centrato 16 canestri su 20 tiri. Giovanni ha centrato 18 canestri su 25 tiri.

Chi è stato il miglior realizzatore?

b) **Calcolare la parte**.

Il 37,5% dei 24 allievi di una classe sono ragazzi. Quante sono le ragazze?

c) Calcola la percentuale.

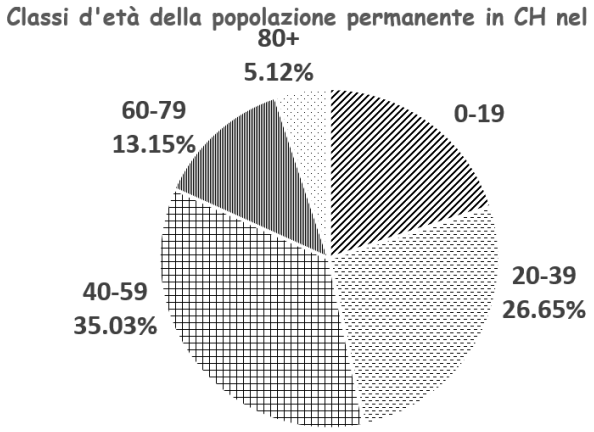
In una classe di 30 allievi vi sono 12 ragazzi. Che percentuale rappresentano rispetto al totale degli allievi? E le ragazze?

d) Calcolare l'intero.

i) In una classe ci sono 8 allievi maschi. Rappresentano il 25% del totale. Quanti sono gli allievi di quella classe?

ii) Durante l'anno scolastico in una classe, a causa di nuovi arrivi, il numero degli allievi è aumentato del 12 % raggiungendo 28 unità. Quanti allievi contava la classe ad inizio anno?

e) Lettura di grafici. Sapendo che gli ultraottantenni rappresentano il 5,12% e sono 434'336, calcola:



a) Il numero d'abitante per ogni classe d'età.

b) La popolazione totale della Svizzera alla fine del 2017.

c) Rappresenta la situazione con un diagramma a barre (o istogramma)

d) Risolvi l'esercizio con Excel.

Problemi con la moltiplicazione. BM3 pag. 81 -84.

1) Calcola:

a) $\frac{1}{2}$ dei $\left(\frac{3}{4} \text{ di } (1'200 \text{ CHF})\right) =$; che posso anche scrivere: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\ (1'200 \text{ CHF})\right) =$

……

b) $\frac{3}{4}$ dei $\left(\frac{1}{2} \text{ di } (1'200 \text{ CHF})\right) =$; che posso anche scrivere: $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\ (1'200 \text{ CHF})\right) =$

……

Conclusione?.....

Come puoi procedere più velocemente?……

……

c) 20% del (10% di 1'200 CHF) =; che posso anche scrivere: 20% del (10% di 1'200 CHF) =

……

d) 10% del (20% di 1'200 CHF) =; che posso anche scrivere: 10% del (20% di 1'200 CHF) =

……

Conclusione?.....

Come puoi procedere più velocemente?……

……

e) $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(600\ \text{CHF})\right]\right\} =$ ……

……

f) $10\%\{20\%[30\%(600\ \text{CHF})]\} =$ ……

……

g) $3‰$ [20%(2'500 km)] =……

……

h) $5‰\left\{40\%\left[\frac{1}{4}(10'000\ \text{CHF})\right]\right\} =$ ……

……

2) Mangio la metà della metà di una torta; che parte della torta ho mangiato? Che parte mi rimane?
3) Spendo la metà della metà della somma che possedevo; che parte mi rimante? Sapendo che mi rimangono36 CHF, quanti franchi possedevo? $\left[\frac{3}{4}\ ;48\ \text{CHF}\right]$
4) D'una tratta percorro prima un mezzo ed inseguito un quarto del rimanente; che parte ho percorso? Che parte mi rimane da effettuare? $\left[\frac{3}{8}\right]$
5) D'una tratta percorro prima un mezzo ed inseguito un quarto del rimanente; sapendo che devo effettuare ancora 27 km. Quanto misura ogni tappa? Quanto è lungo tutto il percorso? [36 km; 9 km; 27 km]
6) Acquistando un paio di pantaloni ai saldi ricevo il 10% di sconto; alla cassa incontro il padrone, mio amico, che mi concede un ulteriore 5% di sconto sul prezzo già scontato. Quanto ammonta, in percentuale, il totale dello sconto? Sapendo che il prezzo di listino era di 200 CHF, quanto ho pagato i pantaloni?
7) In un sacchetto hai le lettere R; M; O; A; qual è la probabilità che estraendole una alla volta e non rimettendole, esca la parola Roma? …. E Amor?

Problemi con la percentuale.

1) Facendo una dieta perdo in una settimana il 10% del mio peso, la settimana successiva perdo solo il 5% del peso. Qual è in percentuale il peso perso in due settimane? Supponi che all'inizio pesassi 80 kg, quanto peserò dopo due settimane? Che percentuale del peso iniziale ho perso?

2) Al mercato della frutta i prezzi sono scontati rispetto ai prezzi nei supermercati. Alla chiusura, cioè nell'ultima ora di lavoro, per vendere la frutta rimanente i commercianti operano un ulteriore sconto.

È più conveniente, per chi acquista alla chiusura, che il commerciante pratichi uno sconto del 30% all'inizio e uno del 10% alla chiusura o viceversa?

3) Lunedì il prezzo della benzina al distributore è salito del 10% rispetto al prezzo del sabato precedente. Mercoledì il prezzo della benzina si riabbassa del 10% rispetto al prezzo di lunedì. Rispetto a sabato, il prezzo della benzina è aumentato, diminuito o rimasto costante? Di quanto? Perché?

4) In una classe l'80% svolge i compiti di matematica, di questi solo il 40% svolge tutti gli esercizi in modo corretto. Calcola la percentuale degli allievi che svolgono correttamente gli esercizi di matematica rispetto agli allievi di tutta la classe.

5) Un acquario contiene 300 L, lunedì viene aggiunto il 30% dell'acqua che contiene. Il giorno successivo, per un disguido, viene svuotato del 20%. Calcola:

a) Qual è la quantità d'acqua in più il lunedì?
b) Qual è la percentuale l'acqua in più rispetto alla situazione iniziale.
c) Sapendo che l'acquario ha una capacità di 400 L, determina la percentuale d'acqua che devi aggiungere per riempierlo.

6) Un negoziante ha deciso di aumentare il prezzo di un suo articolo del 6%.

Determina il prezzo dell'articolo prima dell'aumento sapendo che ora il suo nuovo prezzo è di 371 CHF.

7) Recentemente il prezzo del latte è diminuito nella misura del 7,5%.

Determina il vecchio prezzo di una confezione da 10 litri sapendo che il nuovo prezzo è di 16,65 CHF.

8) Il prezzo d'una bellissima giacca viene aumentato prima del 10% ed inseguito, visto l'enorme richiesta, ancora del 5% sul prezzo già aumentato, costando adesso 231 CHF; qual era il prezzo iniziale di listino?