Esami d'ammissione alle scuole medie superiori agosto 2007
Matematica - Classe prima

Per ognuno dei sei problemi sono assegnati 12 punti; note: 4 con 40 punti, 6 con 64 punti.

Ogni risposta va motivata; in particolare per le domande dei problemi **1** e **2** si mostri qualche passaggio che porta al risultato.

1 Semplificare le seguenti espressioni:

(a) $\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\right)^{-2}$

(b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x^2\right)^2\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^4\cdot\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

(c) $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{2-x}}\cdot\frac{-(x+2)^2+(2-x)^2}{x^2-4}$

2 Risolvere in $\mathbb{R}$:

(a) il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1-3x}{2}+\dfrac{2y-4x}{15}=-1 \\ \dfrac{2y-4x}{15}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

(b) l'equazione $\dfrac{1-2x}{3}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{3x}{2x-2}-\dfrac{5+2x}{3}$

(c) la disequazione $\dfrac{2}{3x+1}>-1$

3 Sono date le funzioni reali

$$f:\ x\mapsto f(x)=\frac{k}{x-1} \qquad g:\ x\mapsto g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$$

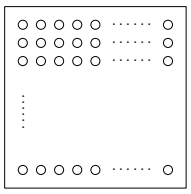
(a) Determinare D_f (insieme di definizione della funzione f).

(b) Calcolare l'immagine di $-\dfrac{1}{2}$ secondo la funzione g.

(c) Per quali $k\in\mathbb{R}$ si ha $f(3)<\dfrac{3}{4}$?

(d) Determinare per quale valore di $k\in\mathbb{R}$ le funzioni f e g e si intersecano sull'asse delle y.

4 Due bambini si trovano per giocare con i soldatini–pedina del Signore degli Anelli. Prima di cominciare cercano di disporli tutti assieme in modo da formare un quadrato (dove in ogni fila c'è lo stesso numero di soldatini). Provano in due modi: la prima volta rimangono 40 soldatini, la seconda, mettendo un soldatino in più per lato, ne mancano 31. Quanti soldatini hanno i due bambini?



5 Nel piano cartesiano sono dati i punti $O(0;0)$, $M(5;0)$, $N(0;2)$ e $Q(0;3)$. La retta r passa per i punti M e N. La retta s è orizzontale (cioè parallela all'asse x) e passa per il punto Q. Essa interseca la retta r nel punto K.

(a) Rappresentare graficamente la situazione descritta (unità: 2 quadretti).

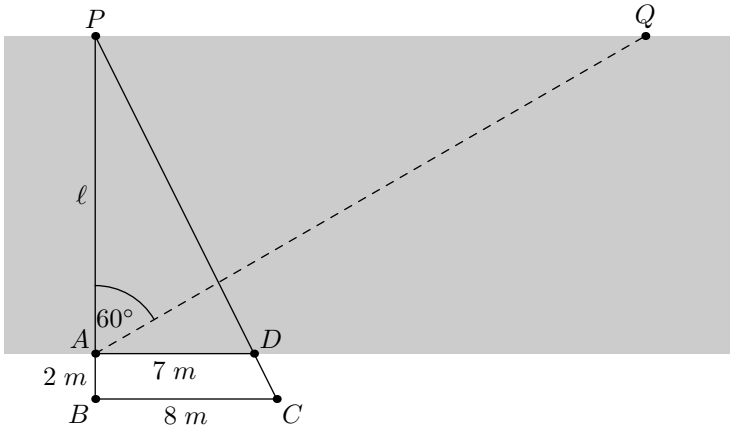
(b) Trovare la forma algebrica della funzione affine che ha come grafico la retta MN.

(c) Determinare le coordinate del punto K.

(d) Il punto P (avente ascissa x positiva) si trova sulla retta s e ha distanza 4 dall'origine $O(0;0)$. Determinare le sue coordinate.

(e) Calcolare l'area del triangolo OPQ.

6 Un gruppo di giovani esploratori deve valutare la larghezza ℓ di un canale (in grigio nella figura). A tale scopo esegue una triangolazione, pianta cioè nel terreno dei paletti nei punti A, B, C, D, in modo da formare i triangoli rettangoli ADP e BCP:



(a) calcolare la larghezza ℓ del canale.

(b) gli esploratori attraversano il canale in canoa; data la corrente, la traiettoria percorsa fa un angolo di 60°, come indicato nel disegno; approdano sull'altra sponda nel punto Q. Quanti metri hanno percorso con la canoa?
[Se non si è risposto alla domanda (a), risolvere la (b) con $\ell := 20\ m$].