Il Calcolo combinatorio.

A) Le permutazioni.

1) Disporre persone.

a) Andrea e Bea frequentano la stessa classe e sono vicini di banco. Sapendo che i banchi sono posizionati a due a due, in quali e quanti modi possono disporsi?



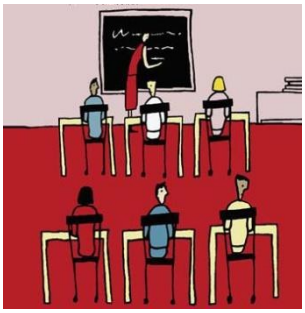
……

……

Puoi aiutarti con un diagramma ad albero nel seguente modo:

Conclusione:……

b) Andrea, Bea e Carlo, frequentano la stessa classe, ma i banchi sono disposti a tre a tre, in quali e quanti modi si possono collocare?



……

……

……

Puoi aiutarti con un diagramma ad albero:

Conclusione:……

c) Quattro amici, Andrea, Bea, Carlo e Daniela, vanno al cinema, in quali e quanti modi possono disporsi uno accanto all'altro?



……..

……..

……..

Puoi aiutarti con un diagramma ad albero:

Conclusione:……

d) Cinque amici, Andrea, Bea, Carlo, Daniela e Enrico, partecipano ad una gara di freccette, quante sono le possibili classifiche?



……..

……

……..

Puoi aiutarti con un diagramma ad albero:

Conclusione:……

Es. Andando al cinema in quanti modi, la tua classe, si può sedere affiancati?

……

Questo modo d'ordinare elementi è detto **PERMUTAZIONE di n elementi**, e si calcola:
P(n) = n! si legge **n** fattoriale es. P(3) = 3! = 3·2·1= 6 Sulla calcolatrice……
Calcola : 4! = ……..; 5! = ……. ; 10!=…… 15! = ……

Con la calcolatrice utilizzeremo i tasti: 

e 

2) **Disporre numeri.**
   a) Prendi in considerazione le cifre 1 e 2, quanti numeri di due cifre puoi scrivere? Quale differenza trovi con il primo esempio della diposizione di persone?

   Puoi aiutarti con un diagramma ad albero:

   Conclusione:……
   b) Prendi in considerazione le cifre 1 e 2, quanti numeri di **tre** cifre puoi scrivere?
   Puoi aiutarti con un diagramma ad albero:

   Conclusione:……

   c) Prendi in considerazione le cifre 1, 2 e 3, quanti numeri di tre cifre puoi scrivere? Quale differenza trovi con il primo esempio della diposizione di persone?

   Conclusione:……

d) Prendi in considerazione le cifre 1, 2 e 3, quanti numeri di **quattro** cifre puoi scrivere? Quale differenza trovi con il primo esempio della diposizione di persone?

Conclusione:……

In generale: :……

3) Permutare lettere.

a) Prendi in considerazione la parola **ERA**, spostando le lettere quante altre possibili parole, anche prive di significato, ottieni? Aiutati con un diagramma ad albero. Trovi un'analogia con gli esercizi precedenti?

Conclusione:……

Osservazione: La permutazione di lettere in una parola è detta **ANAGRAMMA**; non tutti gli anagramma di una parola hanno un senso compiuto.

b) Quanti e quali anagrammi possiede la parola **ROMA**, Aiutati con un diagramma ad albero.

Conclusione:……

c) Quanti e quali anagrammi possiede la parola **ORO?** Aiutati con un diagramma ad albero.

Questo modo d'ordinare elementi è detto **PERMUTAZIONE con ripetizione**, e si calcola:

$P(n;\alpha) = \frac{n!}{\alpha!}$ si legge **n** fattoriale con α elementi che si ripetono. es.

$P(3;2) = \frac{3!}{2!} =$ ……

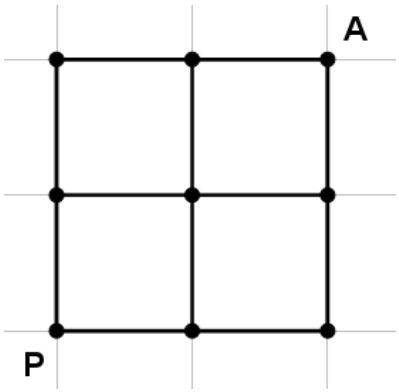
Quanti anagrammi hanno le seguenti parole?

mamma = ……

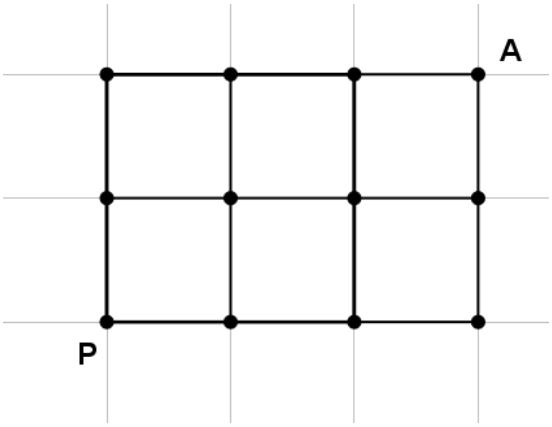
matematica= ……

…… = …….

Un'applicazione: In quanti modi posso spostarmi, nel modo più diretto dal punto P al punto A?



…e in questo caso?



B) Le disposizioni.

a) Andrea, Bea e Carlo vogliono uscire a cena a coppie, dove chi invita sceglie il luogo; in quanti modi i tre amici possono "invitarsi"? Aiutati con una tabella.

	A	B	C
A			
B			
C			

b) Andrea, Bea, Carlo e Daniele vogliono uscire a cena a coppie, dove chi invita sceglie il luogo; in quanti modi i quattro amici possono "invitarsi"?

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

c) Andrea, Bea, Carlo e Daniele vogliono uscire a cena a tre, dove chi invita sceglie il luogo; in quanti modi i quattro amici possono "invitarsi"?

d) Ad un campionato di calcetto sono iscritte 4 squadre; sapendo che vengono effettuate partite d'andata e ritorno, qual è il numero totale delle partite?

e) Nel campionato italiano di calcio sono iscritte 20 squadre, qual è il numero totale delle partite?

f) Tutti i tuoi compagni della tua classe vogliono invitarti, quanti possibili modi vi sono?

g) Con le cifre 1 – 2 – 3 quanti numeri di due cifre posso formare?

h) Con le cifre 1 – 2 – 3 – 4 quanti numeri di due, tre cifre posso formare?

i) Con le 10 cifre quanti numeri di due cifre posso formare?

j) Con le 10 cifre quanti numeri di tre cifre posso formare?

Questo modo di raggruppare degli elementi è detto

DISPOSIZIONE SEMPLICE di n elementi presi **k** volte calcola: matematicamente

scriveremo $\mathbf{D_{(n;k)}} = \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n-1}) \cdot (\mathbf{n-2})}_{\textbf{presi k volte}} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Con la calcolatrice utilizzeremo i tasti: 

e 

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE: $\mathbf{D_{(n;k)}} = n^k$

Verifica gli esercizi precedenti con la calcolatrice.

C) Le combinazioni.

Abbiamo visto che Andrea e Bea possono disporsi in due modi AB – BA e abbiamo dunque due **permutazioni** possibili dunque P (2;2) = 2

È facilmente intuibile che essi formano una sola coppia, matematicamente diremo che la combinazione di due elementi presi due a due è uguale a 1 e scriveremo: $C_{(2;2)} = 1$;

1) Andrea, Bea e Carlo quante coppie formano?

	A	B	C
A			
B			
C			

Conclusione: ……

2) Andrea, Bea e Carlo quanti terzetti formano?

Conclusione: ……

3) Andrea, Bea, Carlo e Daniele quante coppie possono formare?

	A	B	C	D
A				
B				
C				
D				

Conclusione: ……

4) Nella tua classe quante coppie si possono formare?

5) Nella tua classe quanti terzetti si possono formare?

6) Nella tua classe quanti quartetti si possono formare?

In generale: Chiamiamo combinazione di n elementi presi k, le possibilità di formare dei gruppi, considerando identici i gruppi con gli stessi elementi.

Matematicamente scriveremo: $C_{(n;k)} = \frac{D(n;k)}{P(k)}$.

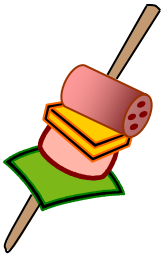
Con la calcolatrice utilizzeremo i tasti: 

e 

Verifica gli esercizi precedenti con la calcolatrice.

ESERCIZI. Prima di risolvere pensa al tipo di sistemazione devi scegliere!

1. Gianni prepara degli spiedini. Ogni spiedino deve avere un pezzettino di pollo, uno di salsiccia, uno di formaggio e un peperone.



   a) Ordinando casualmente pollo, salsiccia, formaggio e peperone, quanti diversi spiedini può ottenere?

   b) Quanti diversi spiedini può ottenere se non vuole che i due pezzetti di carne risultino vicini?

2. Silvia ha tre dadi colorati, con le facce numerate da 1 a 6. Un dado è rosso, uno verde e uno blu. Silvia lancia contemporaneamente tutti e tre i dadi e addiziona i risultati ottenuti. In quanti modi può ottenere 6? Elenca tutti i modi possibili.

3. Ad una festa di compleanno partecipano 12 persone.
   A mezzanotte è il momento del brindisi: ogni invitato fa "cin cin" con ciascuno degli altri invitati. Quanti "cin cin" si avranno in tutto?



4. Daniele si è dimenticato la combinazione delle quattro cifre del lucchetto della sua bicicletta. Ricorda però che:
   - la terza cifra è la somma delle altre tre cifre
   - la seconda e la quarta cifra sono le sole cifre uguali
   - la somma delle quattro cifre è 12

   Aiuta Daniele a ritrovare la combinazione del lucchetto.



5. Le squadre di calcio, o di hockey o di altri sport in generale, adottano uno o due o tre colori-simbolo che si trovano poi su maglie, calzoncini e calzettoni.



   Supponiamo di avere a disposizione i seguenti colori: bianco, nero, rosso, azzurro, giallo, verde.

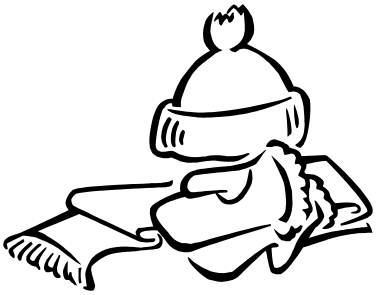
   a) Quante diverse combinazioni di due colori si possono avere col bianco?

   b) Quante nuove combinazioni di tre colori si possono avere col nero?

   c) Quante diverse combinazioni di due colori si possono avere in tutto?

   d) Quante diverse combinazioni di tre colori si possono avere in tutto?

6) Roberta vuole confezionare sciarpa, guanti e cuffia.



Decide di confezionare ogni capo con un colore diverso ed acquista tre gomitoli di lana.

a) In quanti modi diversi può confezionare i capi?

b) Se acquistasse 6 gomitoli di colore diverso, in quanti modi potrebbe confezionare i capi?

7) Claudio il clown sta preparando un nuovo costume. Quando deve attaccare i tre bottoni, apre il cassetto e ne trova solo rossi o blu.



"Come potrei fare?" si domanda; "potrei metterli tutti e tre rossi, oppure uno rosso, uno blu e uno rosso, oppure…

In quanti e quali modi Claudio potrà attaccare i tre bottoni sul suo vestito scegliendo fra rossi e blu?

8) Un anno i piloti Hamilton, Vettel, Raikkonen e Verstappen si contendevano le prime quattro posizioni nel mondiale di formula 1.



In quanti modi diversi si possono classificare?



9) Sei persone si ritrovano ad una festa.

Ognuno fa la conoscenza di tutti gli altri stringendo loro la mano (per una sola volta).

Quante strette di mano ci saranno state alla fine delle presentazioni?

10) Quanti possibili numeri di 4 cifre è possibile scrivere utilizzando le cifre 1; 2; 3 e 4 senza mai ripeterle? Quanti se si potessero ripetere le cifre?

1 2 3 4

11)

12) Qual è la probabilità di vincere al lotto svizzero? Devi indovinare 6 numeri su 42!

CALCOLO COMBINATORIO – **sintesi.**

Prendendo un qualsiasi tipo d'oggetto possiamo "Combinarli" nei seguenti modi:

1) **PERMUTAZIONE**: prendo in considerazione tutti gli elementi e li "sposto",
   a) Senza ripetere gli elementi:
      Es. Tre cifre quanti numeri di tre cifre posso scrivere?
      $P_3 = 3! = 3.2 = 6$
   b) Ripetendo gli elementi ottengo:
      $P_{3\,r} = 3^3 = 27$
   c) Un caso particolare sono le Permutazioni di lettere nelle parole, che formano gli ANAGRAMMI.
      Abbiamo due possibilità:
      i) La parola è formata da tutte lettere diverse.
         Es. Quanti anagrammi possiede la parola STUDIARE?
         $P_8 = 8! = 40\,320$
      ii) Nella parola abbiamo delle lettere uguali.
         Es. Quanti anagrammi possiede la parola NONNA.
         $P_{5;3n} = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.} = \frac{120}{6} = \mathbf{20}$

2) **DISPOSIZIONI**: Prendi in considerazione solo una parte degli elementi.
   Anche qui abbiamo i due possibili casi:
   a) Senza ripetizione:
      Es. con tre cifre quanti numeri di due cifre posso scrivere?
      $D_{3;2} = 3.2 = 6$ dunque $D_{(n;k)} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}_{\text{presi k volte}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ Calcolatrice:
   b) Con ripetizione.
      $D_{3;2\,r} = 3^2 = 9$; dunque $\mathbf{D_{(n;k)} = n^k}$
3) ***COMBINAZIONI***: Prendi in considerazione solo una parte degli elementi, ma attenzione due o più elementi formano una stessa combinazione. Anche qui abbiamo due possibili casi:
   a) Senza ripetizione.
      Es. Con tre ingredienti un Barman quanti cocktail, formati da due bibite, può preparare?
      $C_{3;2} = \frac{3.2}{2} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$ **regola C (n; k)** $= \frac{D(n;k)}{P(k)}$. Calcolatrice:
   b) Con ripetizione.
      Tralasciamo per ora questo caso, ma ti propongo due esempi:
      i) Lanciando due monete quali sono le possibili combinazioni?
      ii)
      Tu ed un tuo amico giocate ai dadi. Quanti possibili coppie possono uscire?

ESERCIZI: Risolvi i seguenti problemi, definendo prima di quale tipo di combinazione si tratta.

1) Quanti sono gli anagrammi (anche privi di senso) delle parole CAMPO, RAPIDO, SCHERMO?

2) Quanti sono gli anagrammi delle parole: ORO; ORSO; NOTTE; CELLE; MATEMATICA.

3) Quanti sono gli anagrammi del tuo Nome? E del tuo Cognome?

4) In quanti modi Andrea, Bea; Carlo e Daniela possono essere interrogati durante una Lezione?

5) In quanti modi l'insegnate d'educazione fisica può farvi mettere su di un rango?

6) In quanti modi si possono schierare in campo (senza distinzione di ruoli):

a) 5 giocatori di una squadra di Hockey
b) 6 giocatori di una squadra di pallavolo
c) 11 giocatori di una quadra di calcio
d) 15 giocatori di una squadra di rugby

7) Con le cifre 6; 7e 8 quanti numeri di tre cifre puoi formare? Quali casi si presentano? Quali sono?

8) Enrico possiede un guardaroba poco fornito, costituito solamente da 2 paia di pantaloni, 2 giacche e 4 camice. In quanti modi potrà vestirsi Enrico, combinando questi 7 capi d'abbigliamento?

9) In quanti modi tre amici, Angelo, Bruno e Carla possono affrontarsi, normalmente, in un torneo da tennis da tavolo?

10) Quattro amici vogliono giocare a calcetto, a coppie. Quante partite effettueranno:

a) Se canta il ruolo. (Portiere o attaccante)
b) Se non canta il ruolo.

11) Tu conosci le sette note. In quanti modi potresti metterle assieme se devi prenderne 4 alla volta, senza ripetere la stessa?

12) In una classe di 20 alunni si vogliono eleggere un capoclasse ed un vice capoclasse. Quante diverse coppie potrebbero essere costituite?

13) Quante bandierine tricolori si possono disegnare con una tavolozza di 6 colori?

14) Trovare tutte le possibili parole che un bimbo di un anno può scrivere mettendo in fila 4 letterine prese da una scatola che ne contiene 12, l'una diversa dall'altra.

15) Quanti sono i possibili anagrammi della parola FOGLIA che non cominciano per A.

16) Quante formazioni diverse (a prescindere dal ruolo) potrebbe schierare in campo l'allenatore della Nazionale, se ha convocato 20 giocatori?

17) Quante diverse colonne si possono fare al totocalcio?

18) Quanti sono gli anagrammi della parola MATEMATICA?

19) Nel campionato italiano di calcio vi sono 20 squadre determina:

a) Quante possibili classifiche finali vi sono.
b) Quante possibili partecipanti alla Champions League potrebbero esserci? 4 squadre.
c) Quante sono le partite d'andata e ritorno di una squadra?
d) Quante partite si disputeranno in tutto il campionato?
e) Quanti possibili campioni vi sono?

20) In quanti modi posso disporre tre libri in:

a) Uno scaffale?
b) Due scaffali?
c) Tre scaffali?
d) Di n scaffali?