Kangourou della Matematica 2018
finale nazionale italiana
Cervia, 29 settembre 2018

LIVELLO BENJAMIN

Tutte le risposte devono essere giustificate

B1. (*5 punti*) Chiama S il risultato dell'addizione

2015 + 2016 + 2017 + 2018 + 2019 + 2020 + 2021.

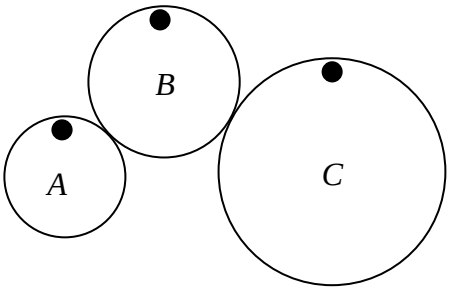
Quale è, secondo, te il modo più veloce per calcolare il quoziente

S : 2018

e qual è il risultato?

B2. (*7 punti*) Eugenio fa il magazziniere. Sa che domani alcuni coltivatori gli porteranno ciascuno lo stesso numero di cassette di mele e che lui dovrà ripartire le cassette su 4 furgoni, in modo che tutti i furgoni viaggino con lo stesso numero di cassette. Il numero dei coltivatori coincide con il numero di cassette che ciascun coltivatore gli porterà. Eugenio sa che se, dopo che avrà distribuito il maggior numero possibile di cassette sui 4 furgoni, avanzerà qualche cassetta, potrà tenerla per sé. Quante cassette potrebbe capitargli di tenere per sé, al massimo?

B3. (*11 punti*) Un ingranaggio è composto da tre ruote dentate *A*, *B* e *C*. *A* ha 16 denti, *B* ne ha 20 e *C* ne ha 30. Come suggerisce la figura, *B* è a contatto sia con *A* sia con *C* (cioè i denti di *B* agganciano sia quelli di *A* sia quelli di *C*), ma *A* non è a contatto con *C*. Ogni ruota ha una tacca. In questo istante l'ingranaggio si mette in moto: quanti giri dovrà fare la ruota *B* prima che tutte e tre le tacche ritornino contemporaneamente, per la prima volta, nella posizione attuale?



B4. (*14 punti*) Quante sono le rette che passano per due dei vertici di un cubo, ma non contengono alcuno spigolo del cubo?

B5. (*18 punti*) A Kanglandia circolano esattamente un milione di auto. Le loro targhe, tutte diverse fra loro, hanno sei cifre: i numeri sono dunque compresi fra 000000 e 999999. Per ogni auto si sommano le cifre della targa e si ripartiscono le auto in gruppi, in modo che tutte le auto di uno stesso gruppo forniscano la stessa somma e gruppi diversi siano relativi a somme diverse. Quante auto hanno complessivamente i sei gruppi meno numerosi?

B6. (*22 punti*) Antonia e Luca si giocano a testa o croce la cifra di 8 euro, lanciando una moneta non truccata. Decidono che la cifra sarà intascata dal primo di loro che avrà avuto 6 lanci a proprio favore. Quando sono sul punteggio di 5 per Antonia e 3 per Luca, sono però costretti ad interrompere il gioco e discutono su come spartirsi gli 8 euro (che nessuno finora ha vinto). Qual è il modo equo di spartirli (cioè il modo che tiene conto della probabilità di vittoria che ognuno dei due ha al momento dell'interruzione)?

Kangourou della Matematica 2018
finale nazionale italiana
Cervia, 29 settembre 2018

LIVELLO BENJAMIN

Soluzioni e svolgimenti

B1. (*5 punti*) Chiama S il risultato dell'addizione

2015 + 2016 + 2017 + 2018 + 2019 + 2020 + 2021.

Quale è, secondo, te il modo più veloce per calcolare il quoziente

S : 2018

e qual è il risultato?

Risposta: 7.

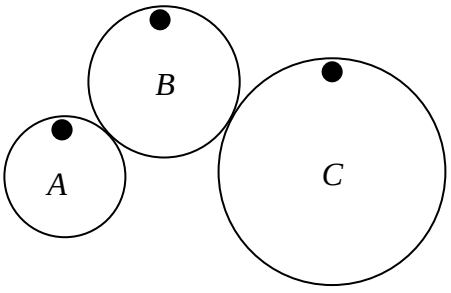
Soluzione. Osservare che dividendo per 2018 la somma del primo addendo con l'ultimo, del secondo con il penultimo e del terzo con il terz'ultimo si ottiene sempre 2. Il risultato dunque è 7.

B2. (*7 punti*) Eugenio fa il magazziniere. Sa che domani alcuni coltivatori gli porteranno ciascuno lo stesso numero di cassette di mele e che lui dovrà ripartire le cassette su 4 furgoni, in modo che tutti i furgoni viaggino con lo stesso numero di cassette. Il numero dei coltivatori coincide con il numero di cassette che ciascun coltivatore gli porterà. Eugenio sa che se, dopo che avrà distribuito il maggior numero possibile di cassette sui 4 furgoni, avanzerà qualche cassetta, potrà tenerla per sé. Quante cassette potrebbe capitargli di tenere per sé, al massimo?

Risposta: 1.

Soluzione. Se n è il numero di coltivatori, a Eugenio arriveranno n^2 cassette; ora n^2: 4 può dare resto 0 (se n è pari) oppure 1 (se n è dispari; infatti per $n = 2k + 1$ risulta $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$).

B3. (*11 punti*) Un ingranaggio è composto da tre ruote dentate *A*, *B* e *C*. *A* ha 16 denti, *B* ne ha 20 e *C* ne ha 30. Come suggerisce la figura, *B* è a contatto sia con *A* sia con *C* (cioè i denti di *B* agganciano sia quelli di *A* sia quelli di *C*), ma *A* non è a contatto con *C*. Ogni ruota ha una tacca. In questo istante l'ingranaggio si mette in moto: quanti giri dovrà fare la ruota *B* prima che tutte e tre le tacche ritornino contemporaneamente, per la prima volta, nella posizione attuale?



Risposta: 12.

Soluzione. Il più piccolo numero intero divisibile sia per 16, sia per 20, sia per 30 è $2^4 \times 3 \times 5 = 20 \times 12$.

B4. (*14 punti*) Quante sono le rette che passano per due dei vertici di un cubo, ma non contengono alcuno spigolo del cubo?

Risposta: 16.
Soluzione. Per ogni vertice V fissato passano 4 rette che non contengono spigoli e che passano per un altro vertice W : una passa per il vertice opposto a V e le altre tre contengono ciascuna una delle diagonali delle facce che hanno V come vertice. I vertici sono 8 ma, dato che ogni retta per V e W viene conteggiata sia tra le 4 rette passanti per V sia tra quelle passanti per W, il numero totale di rette per due vertici che non contengono alcuno spigolo del cubo è $4 \times 8 : 2 = 16$.

B5. (*18 punti*) A Kanglandia circolano esattamente un milione di auto. Le loro targhe, tutte diverse fra loro, hanno sei cifre: i numeri sono dunque compresi fra 000000 e 999999. Per ogni auto si sommano le cifre della targa e si ripartiscono le auto in gruppi, in modo che tutte le auto di uno stesso gruppo forniscano la stessa somma e gruppi diversi siano relativi a somme diverse. Quante auto hanno complessivamente i sei gruppi meno numerosi?

Risposta: 56.
Soluzione. Ci sono due gruppi con un'auto ciascuno (somma 0 e somma $9 \times 6 = 54$), due gruppi con 6 auto ciascuno (somma 1 e somma $9 \times 5 + 8 = 53$), due gruppi con 21 auto ciascuno (somma 2 e somma 52; quello con somma 2 è costituito da 6 auto con una cifra 2 e cinque cifre 0 e 15 auto con due cifre 1 e quattro cifre 0, l'altro in modo simmetrico). Tutti gli altri gruppi sono ovviamente più numerosi.

B6. (*22 punti*) Antonia e Luca si giocano a testa o croce la cifra di 8 euro, lanciando una moneta non truccata. Decidono che la cifra sarà intascata dal primo di loro che avrà avuto 6 lanci a proprio favore. Quando sono sul punteggio di 5 per Antonia e 3 per Luca, sono però costretti ad interrompere il gioco e discutono su come spartirsi gli 8 euro (che nessuno finora ha vinto). Qual è il modo equo di spartirli (cioè il modo che tiene conto della probabilità di vittoria che ognuno dei due ha al momento dell'interruzione)?

Risposta: 7 euro ad Antonia e 1 a Luca.
Soluzione. Immaginiamo che il gioco vada comunque avanti per 3 lanci (anche se Antonia vincesse prima): si avrebbe senz'altro il vincitore. 3 lanci hanno, nel complesso, 8 esiti possibili. Di questi 8, solo uno darebbe la vittoria a Luca.