Il calcolo letterale - algebrico. (CM teoria pag.73 – 83; esercizi pag. 324 – 351)

Il calcolo letterale, o algebrico, permette di generalizzare un problema, dove al posto di numeri vengono utilizzate delle lettere, dette variabili.

1) Introduzione: risolvi il seguente problemino:

Pensa un numero: ……

Moltiplicalo per tre: ……

Aggiungi quattro al risultato: ……

A ciò che ottieni aggiungi il numero di partenza: ……

Dividi ciò che ottieni per quattro: ……

Trogli il numero che hai pensato all'inizio: ……

Ottieni: ……

Generalizza ora il problema con le lettere:

……

……

……

Trasforma:

i) Le seguenti frasi in espressioni letterali:

a) La somma del doppio di x con la sua metà: ……
b) La differenza tra i numeri a e b: ……
c) Il prodotto tra $10x^7$ e $5x^3$: ……
d) Il quoto tra $10x^7$ e $5x^3$: ……
e) Il quadrato di $5x^3$: ……
f) Un terzo di n diminuito di 2: ……
g) Il precedente di 3y: ……
h) Il successivo di b^2: ……
i) Il 10% di y: ……
j) Il consecutivo di $\frac{2}{5}x$: ……

ii) Le seguenti espressioni letterali in frasi.

a) $x + 3x =$ ……

b) $x^2 - 2x =$ ……

c) $m - (m - 1) =$ ……

d) $(n-1) + n + (n+1) =$ ……

iii) **Le lettere** servono specialmente a scrivere delle formule e risolvere dei problemi generalizzando dunque una situazione.

a) L'area del triangolo: ……

b) L'area d'un triangolo equilatero dato il lato: ……

c) Il teorema di Pitagora: ……

d) La diagonale del cubo: ……

e) La densità della popolazione: ……

f) L'indice di massa corporea: ……

g) Il costo del pieno di benzina sapendo che un litro costa 1,50 CHF.

……

h) Il costo delle chiamate al telefono, conoscendo il costo al minuto.

……

i) Andrea, Bea e Carlo sono tre fratelli: definisci le loro età sapendo che Andrea ha due anni meno di Bea e che Carl ha il triplo degli anni d'Andrea. Quale sarà la somma delle loro età?

……

……

j) Spendo prima i $\frac{3}{8}$ d'una somma, ed inseguito i $\frac{2}{5}$ della somma restante; che parte mi rimane?

……

……

k) Il 30% del 40% di una somma x.

……

……

Osservazione:

Al posto delle lettere (variabili) possiamo dunque sostituire dei numeri, ma ricorda:

- Lettere diverse indicano numeri diversi: x e y non indicano lo stesso numero!
- Quando operi con le lettere devi chiederti per quali valori numerici l'operazione ha senso (o perde di significato).

Quali valori può assumere la variabile nei seguenti casi?

i) a +3 = ……

ii) $\frac{a}{3}$ =……

iii) $\frac{3}{a}$ =……

iv) $\sqrt{a}$ = ……

v) $\sqrt{-a}$ =……

vi) $\sqrt[3]{a}$ =……

2) I monomi.

La più semplice espressione letterale o algebrica è detta monomio, esso è formato da una o più lettere (variabili) "collegate" solo tramite la moltiplicazione.

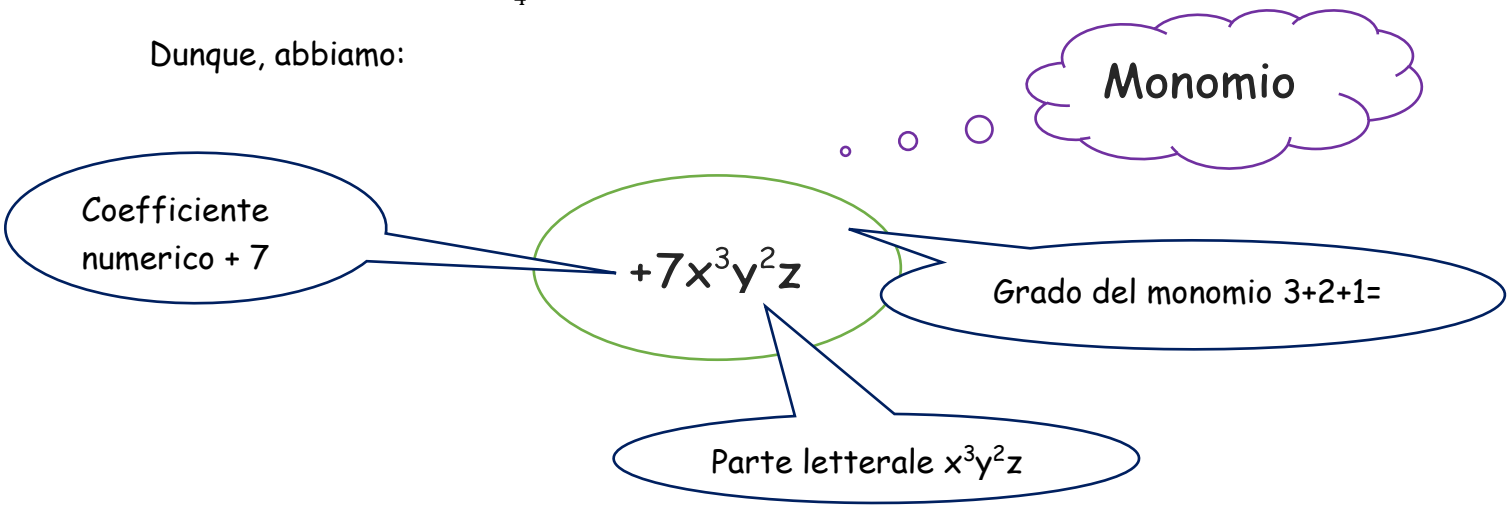
Esempio: +3x; -7a^{2}b^3 ; $+\frac{7}{4}x^3y^4z$; $\sqrt{2}\ m^5n^7$; ……

Non sono monomi: 3a + 4b; $1+\frac{3}{2}x^2y$; $(a+b)^2$; ……

Due monomi sono detti simili quando hanno la stessa parte letterale.

Esempio: 3x è simile a $+\frac{7}{4}x$, ma non a 3x^2 ; -7a^{2}b^3 è simile a +4a^{2}b^3 ma non a +4a^{4}b^3

Dunque, abbiamo:



Completa la seguente tabella:

Monomio	Coefficiente numerico	Parte letterale	Monomi simili	Monomio opposto	Grado del monomio
$-7a^2b^3$					
	$+\frac{7}{4}$	x^3y^4z			
			$\sqrt{2}\ m^5n^7$		
				$1{,}2c^3d^8$	
					8
$2a^nb^mc^{n+2}$					

3) Operazioni con i monomi. BM3 pag. 85 es. 58 – 59.

a) L'addizione – la sottrazione.

Esempi.

Addizione: $2ab + 6ab = (2+6)\,ab =$ ……; $2x^3y^2 + 4x^2y^3 =$ ……

Sottrazione: $2ab - 6ab = (2-6)\,ab =$ ……; $-2x^3y^2 - 4x^3y^2 =$ ……

$\frac{4}{3}a^2b^3 - \frac{7}{6}a^2b^3 =$ ……; $\frac{4}{3}a^2b^3 - \frac{7}{6}a^3b^3 =$ ……;

Regola: ……

Esercizi: CM pag. 330 – 335.

i) $-3x + (-7a) - (-2x) + (+5a) - (+8a) =$

ii) $\left(-\frac{5}{2}ab^2\right) + \left(-\frac{3}{4}ba^2\right) - \left(+\frac{7}{3}ab^2\right) + \frac{13}{6}a^2b - \left(-\frac{4}{3}a^2b\right) =$

iii) $2x^m - 5y^n + 3x^m - 6y^{2n} + 6y^n =$

iv) $\frac{2}{5}a^nb^{m+1} - \frac{1}{2}a^{n-1}b^m - \frac{5}{2}a^nb^{m+1} + \frac{3}{5}a^{n-1}b^m =$

Qual è il significato geometrico di a + b =? E di a – b= ?



Conclusione: la somma geometrica di due o più monomi è un ……

……

……;

algebricamente non rappresenta più un …… ma un **polinomio**.

b) La moltiplicazione.CM es. pag.335 - 339.

Esempi:

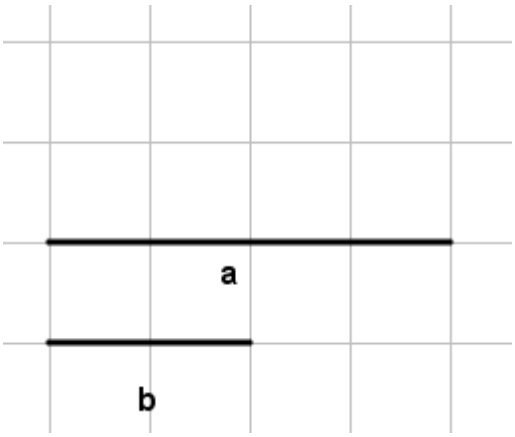
$(-2ab) \cdot (+6a) =$.....; $(-2x^3y^2) \cdot (-4x^2y^3) =$.....;

$(+2a^n b^m) \cdot (+6a) =$.....;$(+2x^{3n}y^{2+m}) \cdot (-4x^{n+2}y^{3m}) =$.....;

$\left(-\frac{4}{3}a^2b^3\right) \cdot \left(-\frac{9}{8}a^2b^3\right) =$.....;$\left(+\frac{4}{3}a^{2+n}b^m\right) \cdot \left(-\frac{9}{8}a^n b^m\right) =$.....;

Regola: .....

Qual è il significato geometrico di a · b =?



Conclusione: il prodotto geometrica di due monomi è

.....

.....;

algebricamente rappresenta ancora un .....

c) La divisione. CM es. pag.342 – 343.

Esempi:

$(-6ab) : (+2a) =$.....; $(-4x^5y^7) : (-12x^2y^3) =$.....;

$(+12a^n b^m) : (+6a) =$.....;$(+2x^{3n}y^{2+m}) : (-4x^n y^{3m}) =$.....;

$\left(-\frac{4}{3}a^7\right) : \left(-\frac{20}{9}a^2\right) =$.....;$\left(+\frac{15}{16}a^{2+n}b^m\right) : \left(-\frac{9}{8}a^n b^m\right) =$.....;

Regola: .....

Attenzione che se:

i) I coefficienti non sono divisibili: $(+5a^3b^2) : (-2ab) =$.....

ii) I coefficienti sono delle frazioni: $\left(-\frac{1}{2}x^3y^2z^5\right) : \left(+\frac{3}{2}xyz^2\right) =$.....

.....

Es. $\left(+\frac{12}{45}a^5b^3\right) : \left(-\frac{36}{50}a^2b\right) =$.....

iii) La parte letterale del divisore ha l'esponente maggiore di quella del dividendo.

$(+8x^3)\colon(-2x^8) =$ ……;

$\left(-\frac{1}{2}a^2b^3\right)\colon(+2a^3b^5) =$ ……

iv) La divisione può essere scritta sotto forma di frazione, quindi puoi semplificare applicando le ……nota proprietà ……:

$(-6ab) : (+2a) =$……;

$(-4x^5y^7)\colon(-12x^2y^3) =$……;

$(+8x^3)\colon(-2x^8) =$ ……;

$\left(-\frac{1}{2}a^2b^3\right)\colon(+2a^3b^5) =$ ……

d) L'elevazione a potenza. CM es. pag.339 – 341.

Ricorda l'elevazione a potenza è un modo più semplice per scrivere una ……,

dunque:

$(+6a)^2 =$ ……=……=……

$\left(+\frac{1}{2}a^3b^2\right)^2 =$……

$\left(-\frac{1}{2}a^3b^2\right)^3 =$……

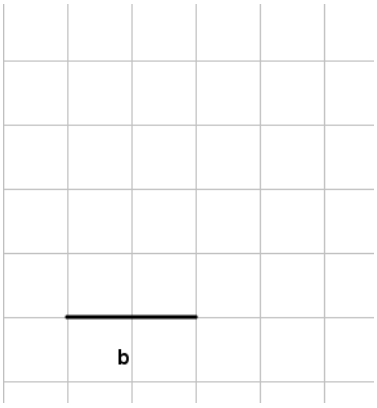
$(+6a)^n =$ ……

$(+2a^3b^2)^n =$……

$(+2a^nb^m)^n =$……

Regola: ……

Qual è il significato geometrico di b^3 =?



Conclusione: l'elevazione al cubo di un monomio è

……

……;

algebricamente rappresenta ancora un ……

e) Espressioni algebriche o letterali coni monomi. CM Te. pag. 81 - es. pag.343 -347

Le espressioni con i monomi vengono semplificate rispettando le stesse regole utilizzate per quelle numeriche.

i) $a^{10}b^5 : (-a^4b) - a^5b^2 \cdot (-a^4b^3) : a^3b - 12a^{13}b^{30} : (-6a^7b^{26}) =$

ii) $\frac{1}{4}ab \cdot ab^3 + \left[\left(-\frac{1}{3}a^2b^2\right)^3 : \frac{2}{9}a^4b^2\right] =$

iii) $\left(\frac{2}{3}a^m b^{m+2}\right) : \left(\frac{4}{9}a^n b^2\right) + \frac{1}{2}b^m =$

iv) $(3a^3 \cdot a^m b^3 - 2a^{m+3}b^3) : (a^m b^2) =$

f) mcm di monomi. CM Teoria pag. 82 – esercizi pag.348 -350

mcm tra duo o più monomi serve per sommare duo o più frazioni.

Esempio: $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$; calcolo mcm (4;6) = 12; ottengo $\frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$

Con le lettere capita la stessa cosa: $\frac{3}{a} - \frac{5}{b} =$; calcolo mcm (a; b) =……

Ottengo: ……

Calcola l'mcm dei seguenti gruppi di monomi – polinomi.

a – 2a = ……; a^2 – 2a = ……; $8x^2y^3 - 12x^3y^5$= ……;

Somma le seguenti frazioni algebriche. CM es. 139 – 147 pag.439.

$\frac{3}{a} - \frac{5}{2a} =$ ……; $\frac{3}{a^3} - \frac{5}{2a} =$ ……;

$\frac{3b}{a^3} - \frac{5b}{2a} =$ ……; $\frac{3+b}{a^3} + \frac{5-b}{2a} =$ ……;

$\frac{3+b}{a^3} - \frac{5-b}{2a} =$ ……; $\frac{3-b}{a^3} - \frac{5+b}{2a} =$ ……;

g) MCD di monomi.

MCD serve a scomporre in fattori sfruttando la messa in evidenza (o raccoglimento a fattor comune), l'inverso della applicazione delle proprietà distributiva.

Esempio: $2x + 6y = 2(x + y)$; 2 è MCD tra 2 e 6.

Calcola MCD tra i seguenti gruppi di monomi.

8a – 4b= ……; $8a^2$ – 2a =……; $8x^2y^3 - 12x^3y^5$ =……;

$8\pi^2 - 16\pi^3$ =……; $\frac{3}{4}y^5 - \frac{5}{4}y^7 =$ ……; $-4x + 4y$ =……;

8a – 4b + 12 c = ……; $8x^2y^3 - 12x^3y^5 - 16x^4y^3$ = ……;

Scomponi in fattori raccogliendo il fattore comune (messa in evidenza)

$8a - 4b =$ ……; $8a^2 - 2a =$ ……; $8x^2y^3 - 12x^3y^5 =$ ……;

$8\pi^2 - 16\pi^3 =$ ……; $\frac{3}{4}y^5 - \frac{5}{4}y^7 =$ ……; $-4x + 4y =$ ……;

$8a - 4b + 12c =$ ……; $8x^2y^3 - 12x^3y^5 - 16x^4y^3 =$ ……;

La scomposizione in fattori serve a semplificare delle frazioni algebriche.

Esempio: $\frac{a^4+a^3}{a^6} = \frac{a^3\cdot(a+1)}{a^6} =$ ……

Semplifica le seguenti frazioni algebriche dopo aver scomposto in fattori.

$\frac{x^2+3x}{x} =$ ……; $\frac{x^2+3x}{7x+21} =$ ……;

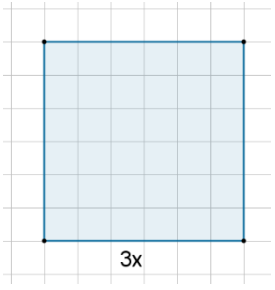
$\frac{9+3x}{3x} =$ ……; $\frac{5ab}{15a^2+15ab} =$ ……;

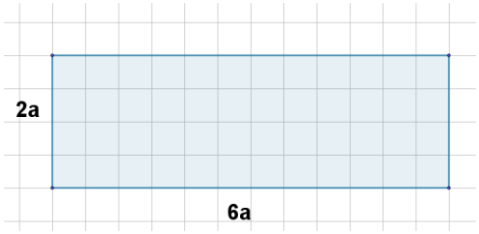
$\frac{-5x+10}{x-2} =$ ……; $\frac{4a-4}{2-2a^2} =$ ……;

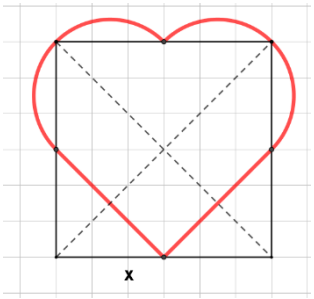
$\frac{a+1}{a} =$ ……; $\frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} =$ ……;

Esercizi.

1) Trasforma le seguenti frasi in espressioni algebriche.
   a) Il successivo del doppio d'un numero.
   b) Il precedente del triplo d'un numero.
   c) Il quadruplo di x aumentato di 4.
   d) 8 diminuito della metà di y.
   e) La differenza tra 6 e il quadrato di b, moltiplicata per 4.
   f) Il triplo di a aumentato di 9 viene diviso per il quadrato di y sottratto a x.
   g) Si sottragga al doppio di b il cubo di x e si moltiplichi poi per il reciproco di $-\frac{3}{2}$.
   h) Si moltiplichi la differenza tra 20 e il doppio di y per 8.
2) Esprimi mediante un'espressione letterale il perimetro e l'area delle seguenti figure.







3) Quale sarà la misura della diagonale d'un cubo avente lo spigolo che misuri **4x?**
4) **<u>Puoi sforzarti</u>** a risolvere un qualche esercizio a pagina 351 del CM.

4) I Polinomi. CM Teoria pag. 83 – 89; esercizi pag. 356 – 372.

La somma (differenza) di due o più monomi e detta polinomio.

Esempio: $3a + 4b$; $1 - \frac{3}{2}x^2y$; $(a+b)^2$; ……

Con i polinomi possiamo svolgere tutte le operazioni che abbiamo già utilizzato sia in campo numerico ($\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R}$) che in quello algebrico con i monomi.

I polinomi posso essere definiti con **più variabili**: esempio $3a + 4b$; $\frac{1}{5}z - \frac{3}{2}x^2y + y$; ……

oppure ad una **sola** (ev. 2)**variabile**: esempio $2x + 3x^2 - 1 + x^3$; $a^2 + b^2 + 2ab$; ……

in quest'ultimo caso ordiniamo il polinomio in modo decrescente secondo l'esponente della variabile nel seguente modo: $+x^3 + 3x^2 + 2x - 1$;……

Un polinomio può essere definito anche nel seguente modo:

$P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ che diventerà $P(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 4$ se sostituisco x = 1.

$P(y) = \frac{3}{2}y^2 - 2y + 1$; calcola $P(0) =$……

a) L'addizione – la sottrazione. CM es. pag.356 - 361.

$(2a + 3b) + (5a - 7b) =$……

$(2a + 3b) - (5a - 7b) =$……

$(2a + 3b) + (5x + 7b) =$……

$(3x^2 + 2x - 1) + (4x - 5x^2 + 6 - x^3) =$ ……

$\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b\right) - \left(\frac{5}{6}a - \frac{7}{4}b\right) =$……

Regola: ……

b) La moltiplicazione.CM es. pag.335 - 339.

Ricorda: $98 \cdot 7 =$ ……

Oppure: $98 \cdot 7 =$ ……

Con le lettere capita la stessa cosa, facendo molta attenzione ai segni.

$(2a + 3) \cdot (-4ab) =$……

$(-5x^2y) \cdot (-2 + 3x) =$……

Per calcolare questo prodotto devo dunque applicare le proprietà ……

$(2x^3y^8 - 3x^2y^5) \cdot (-4x^4y^3) =$ ……

$\left(-\frac{8}{9}a^4b^6 + \frac{20}{27}a^{12}b^{15}\right) \cdot \left(-\frac{15}{4}a^5b^3\right) =$ ……

Esercizi: semplifica le seguenti espressioni algebriche.

- $(x+2)\cdot x-\ (x^2+3x-4)=$ [4 – x]
- $2x\cdot(x-3)-2(x^2-3x-3)=$ [6]
- $(3m+6x)-(m^2+3x)-(3x+2m)=$ [m-m^2]
- $2a\cdot(2a-3)-9-4\cdot(a^2-2)+6a=$ [-1]
- $2a^2-a\cdot(a-2)-(a-b)\cdot 2+2b=$ [a^2+4b]

Con i radicali procedo allo stesso modo.

- ✓ $2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{6})-3\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{6})+2\sqrt{3}=$ $[\sqrt{3}+\sqrt{6}]$
- ✓ $2\sqrt{3}\cdot(4\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{2}\cdot(\sqrt{8}-\sqrt{27})=$ $[5\sqrt{6}-2]$
- ✓ $2\sqrt{3}\cdot(4\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}\cdot(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})=$ $[11\sqrt{6}+2]$

Ricorda:

$27\cdot 34=(20+7)\cdot(30+4)=$……

$27\cdot 34=(\quad)\cdot(\quad)=$……

Dunque devo applicare ……volte la ……nota proprietà ……

Con le lettere capita la stessa cosa:

$(x+7)\cdot(x-5)=$ ……

Calcola:

$(x+7)\cdot(2x+4)=$……

$(5y-3)\cdot(-2x+4)=$……

$(a+b)\cdot(a+b)=$……

$(a-b)\cdot(a-b)=$……

$(a-b)\cdot(a+b)=$……

$(x+y)^2=$……

$(b-a)^2=$……

Con i numeri razionali si procede allo stesso modo.

$\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)=$……

$\left(\frac{5}{2}x+\frac{2}{5}y\right)\cdot\left(\frac{4}{3}y+x\right)=$……

$\left(-\frac{3}{2}a^2+\frac{7}{3}b\right)\cdot\left(\frac{4}{9}a-3b\right)=$……

$\left(\frac{1}{2}x-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}\right)=$……

$\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}\right)=$……

$\left(\frac{5}{2}x-\frac{2}{5}y\right)^2=$……

$(0{,}5x+1{,}\overline{2})\cdot(0{,}\overline{9}x+1{,}\overline{12})=$……

Con i numeri reali e in particolare con i radicali si procede allo stesso modo.

$\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right)=$ ……

$\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)=$ ……

$\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)=$ ……

$\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)^2=$ ……

$\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)\cdot\left(5\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)=$ ……

$(\pi+1)\cdot(\pi-2)=$ ……

$(\pi+1)\cdot(\pi-1)=$ ……

$(\pi+1)^2=$ ……

$\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\pi-\frac{2}{5}\right)=$ ……

Calcola.

- $\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}-3\right)^2-\left(3\sqrt{2}-4\right)\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)=$ $\left[18-14\sqrt{2}\right]$
- $\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(\sqrt{x}-1\right)^2+2\left(\sqrt{x}+3\right)=$ $\left[4\sqrt{x}+1\right]$

Ora **devi** risolvere su BM3 a pagina 96 gli esercizi 111 - 116

c) La divisione.CM es. pag.342 - 343.

Ricorda: $98 : 7 =$ ……

Per calcolare questo quoto devo dunque applicare le proprietà ……

Con le lettere capita la stessa cosa, facendo molta attenzione ai segni.

$(-8y^8 + 20y^5) : (-4y^3) =$ ……

$\left(\frac{8}{9}y^8 - \frac{20}{27}y^5\right) : \left(+\frac{16}{12}y^3\right) =$ ……

$(2x^9y^8 - 3x^7y^5) : (-4x^4y^3) =$ ……

$\left(-\frac{8}{9}a^4b^6 + \frac{20}{27}a^{12}b^{15}\right) : \left(-\frac{20}{27}a^5b^3\right) =$ ……

Con i radicali procedo nello stesso modo.

$(\sqrt{20} + \sqrt{15}) : \sqrt{5} =$ ……

$(\sqrt{75} - 6) : \sqrt{3} =$ ……

$(2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}) : \sqrt{2} =$ ……

$(\sqrt{48} + 6 - \sqrt{108}) : \sqrt{3} =$ ……

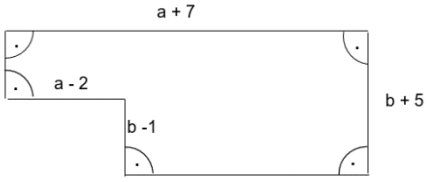
h) Espressioni algebriche o letterali coni polinomi. CM es. pag.366 -369

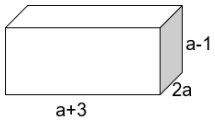
Esercizi.

- $[(3x^3 + 6x^2) : 2x - x] : x =$ $\left[\frac{3}{2}x + 2\right]$
- $(-2x^2 + 4x^4y^2 - x^4y) : [(x + y)^2 - (x + y)(x - y) - 2y^2] =$ $\left[-x + 2x^3y - \frac{1}{2}x^3\right]$
- $\{[b(2a - b)(2a + b) + b^2(b + 4ab)] : (-2ab) + 2(a + b^2)\} : \frac{1}{2}b =$ $[0]$

Alcuni problemi con i polinomi.

- Un rettangolo ha la base che supera di 5 cm il doppio dell'altezza; indicando con **x** la misura dell'altezza esprimi con un polinomio semplificato la misura del perimetro, dell'area e della diagonale.
- Determina, usando le lettere **a** e **b**, l'area dell'esagono concavo in due modi diversi.





- Esprimi usando la lettera **a** il volume, l'area totale e la diagonale del parallelepipedo rettangolo rappresentato.