La frazione. BM2 teoria pag. 35 – 41 es. pag. 105 – 111.



1) La frazione come parte.

$\frac{3}{4}$ della classe; le ragazze sono $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ della classe. $\frac{13}{28}$ della tavoletta

Frazione	Intero	Frazione complementare
$\frac{13}{28}$	$\frac{28}{28}$	$\frac{15}{28}$
$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$		

Es.

- Durante la verifica di matematica 12 allevi su 18 erano sufficienti, qual è la parte degli allievi sufficienti? E quella degli allievi insufficienti?

  ……

  ……

- Ho speso 45 CHF, sui 180 CHF che avevo nel mio borsellino. Che parte mi rimane.

  ……

  ……

- Le cinque ore di matematica che parte sono rispetto al totale settimanale?

  ……

  ……

- Devo percorrere ancora 130 Km, per arrivare a destinazione. Sapendo che ho già effettuato 195 km, che parte del tragitto mi rimane? Che parte ho percorso?

  ……

  ……

  ……

  ……

Tipi di frazioni.

Proprie: $\frac{13}{28}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ quando il numeratore è minore del denominatore.

Improprie: : $\frac{19}{8}$; $\frac{30}{17}$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ quando il numeratore è maggiore del denominatore

Apparenti: $\frac{16}{8}$; $\frac{51}{17}$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$; $\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ quando il numeratore è multiplo del denominatore

2) La frazione come divisione.

Svolgendo la divisione tra numeratore e denominatore posso ottenere:

a) Un numero decimale finito: $\frac{3}{8}$ = 3 : 8 = 0,375 ; $\frac{19}{4}$ =

b) Un numero decimale periodico: $\frac{8}{3}$ = 8 : 3 = $2,\overline{6}$; $\frac{13}{28}$ = 13 : 28 =

Trasforma in decimali le seguenti frazioni: $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{20}{10}$; $\frac{35}{100}$

3) La frazione come insieme di divisioni equivalenti (aventi lo stesso valore).

Posso ottenere frazioni equivalenti nei seguenti due modi:

a) **Amplificando** la frazione: moltiplico cioè numeratore e denominatore per lo stesso numero.

$\frac{3}{8}$= $\frac{3 \cdot 2}{8.2}$ = $\frac{6}{16}$= …… dunque $\frac{3}{8} = \left\{\frac{3}{8};\ \frac{6}{16};\ \frac{9}{24}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$

$\frac{2}{5} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$\frac{7}{4} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

b) **Semplificando** la frazione: divido cioè numeratore e denominatore per lo stesso numero, applicando la ……nota proprietà ……

$\frac{8}{20} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ frazione ridotta ai minimi termini, quando non posso più dividere.

$\frac{12}{15} =$ $\frac{100}{150} =$

$\frac{24}{108} =$ $\frac{2552}{1232} =$

Se la frazione è composta da numeri troppo grandi, per ridurla ai minimi termini divido numeratore e denominatore per MCD.

Semplifica normalmente:	Semplifica con il metodo del MCD
$\frac{8}{12} =$	MCD (8; 12) = $\frac{8}{12} =$
$\frac{24}{108} =$	MCD (24;108) = $\frac{24}{108} =$
$\frac{2552}{1232} =$	MCD (2552;1232) = $\frac{2552}{1232} =$

4) La frazione come percentuale.

La percentuale è una frazione con denominatore cento, scritta in modo particolare.

Es. $\frac{45}{100} = 45\%$; $\frac{89}{100} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$; $\frac{159}{100} =$ ……

Per trasformare una frazione nella forma percentuale abbiamo due modi:

a) Determinare la frazione equivalente con denominatore 100:

$\frac{3}{5} = \frac{3.}{5.} = \frac{\quad}{100}$ = ……% ; $\frac{7}{4} = \frac{7.}{4.} = \frac{\quad}{100}$ = ……% ; $\frac{4}{7} = \frac{4.}{7.} = \frac{\quad}{100}$ = ……%

b) Calcolare il decimale.

$\frac{3}{5} = 3:5 = \cdots \ldots$= ……% ; $\frac{7}{4} = 7:4 = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$ = ……% ; $\frac{4}{7} = 4:7 = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ = ……%

Esercizi: Trasforma in percentuale.

$\frac{7}{8}$ =……= ……% ; $\frac{13}{9}$ =……= ……% ; $\frac{42}{13}$ =……= ……% ;

La percentuale serve anche per confrontare delle situazioni.

Esempi.

- Durante la verifica di matematica 12 allevi su 18 erano sufficienti, qual è la percentuale degli allievi sufficienti? E quella degli allievi insufficienti?

  ……

  ……

- Ho speso 45 CHF, sui 180 CHF che avevo nel mio borsellino. Che percentuale mi rimane? Che percentuale ho speso?

  ……

  ……

- Devo percorrere ancora 130 Km, per arrivare a destinazione. Sapendo che ho già effettuato 195 km, che percentuale del tragitto mi rimane? Che percentuale ho percorso?

  ……

  ……

  ……

  ……

5) La frazione come operatore.

a) Operatore diretto.

Conosco l'intero, devo calcolare la parte.

Esempi.

i) Sapendo che il segmento $|AC| = 30cm$, determina la misura $|AB| = \frac{3}{5}|AC|$.

ii) La Torre di Pisa ha 296 scalini; ne ho percorso i $\frac{5}{8}$. Quanti scalini ho percorso? Che parte mi rimane? Quanti scalini sono?

iii) Ho speso il 25% di 350 CHF; quanto ho speso? Che percentuale mi rimane? A quanto ammonta la somma rimasta?

iv) La capacità di una bottiglia corrisponde ai $\frac{3}{4}$ di Litro. Quanti dL contiene una bottiglia?

v) Passo i $\frac{5}{8}$ della mia giornata in diverse attività; a quante ore corrispondono? Quanti minuti?

b) Operatore inverso.

Conosco la parte, devo calcolare l'intero.

i) Sapendo che il segmento |AC|=30cm, determina la misura di |AB|, sapendo che $\frac{3}{5}|AB|=|AC|$.

ii) La Torre Eiffel costituisce uno dei simboli di Parigi; vuoi salire fino alla cima ed hai percorso 370 scalini corrispondenti ai $\frac{2}{9}$ della stessa. Che parte ti manca da salire? Quanti scalini? In totale quanti scalini ha la Torre Eiffel?

iii) Ho speso il 25% di una somma, corrispondente a 3'500 CHF. Quanto ammonta la somma? Che percentuale mi rimane? A quanto ammonta la somma rimasta?

iv) Ho bevuto i $\frac{3}{10}$ di una bottiglia, corrispondente a 126 cL. Qual è la capacità della bottiglia?

v) Per andare in vacanza, ho viaggiato 1 h 15 min, corrispondenti ai $\frac{5}{6}$ del tempo totale. Quanto dura il viaggio?

vi) Acquistando una camicia ricevo uno sconto del 12% corrispondente a 4,8 CHF. Quanto costa la camicia? Quanto la pago?

6) Confronto di frazioni.

Per confrontare due o più frazioni abbiamo diversi modi.

Es. Confrontare i) $\frac{5}{8}$ *e* $\frac{2}{3}$ ii) $\frac{17}{13}$ *e* $\frac{19}{14}$.

a) Calcolo il numero decimale.

i) $\frac{5}{8}=0{,}625$; $\frac{2}{3}=0,\bar{6}$; $0{,}625<0,\bar{6}$ segue che $\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

ii) $\frac{17}{13}$; $\frac{19}{14}$; $\frac{17}{13}=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{19}{14}=\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; …… ……

Segue che …… …… ……

b) Con la percentuale.

i) $\frac{5}{8}=0{,}625=$ ……% ; $\frac{2}{3}=0,\bar{6}=\cdots\ldots\%$; ……% $<\cdots\ldots\%$ segue che $\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

ii) $\frac{17}{13}=\cdots\ldots\ldots\ldots=\cdots\ldots\ldots\%$; $\frac{19}{14}=\cdots\ldots\ldots\ldots=\cdots\ldots\ldots\ldots\%$; ……% $<\cdots\ldots\%$ segue che $\frac{17}{13}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{19}{14}$

c) Riducendo le frazioni allo stesso denominatore.

i) Confrontare $\frac{5}{8}$ *e* $\frac{2}{3}$; m.c.m. (8; 3) =24

$\frac{5}{8}=\frac{\ }{24}$; $\frac{2}{3}=\frac{\ }{24}$ => $\frac{\ }{24}\ldots\ldots\ldots\ \frac{\ }{24}$ dunque $\frac{5}{8}\ldots\ldots\ldots\frac{2}{3}$

ii) Confrontare $\frac{7}{3}$ *e* $\frac{9}{4}$; m.c.m. (……..; ……..) =……..

$\frac{7}{3} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$; $\frac{9}{4} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ => $\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$. … … …. $\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ dunque $\frac{7}{3}$ … … … $\frac{9}{4}$

d) La frazione applicata come operatore diretto.

i) Confrontare $\frac{5}{8}$ *e* $\frac{2}{3}$; scelgo come grandezza 240 CHF.

$\frac{5}{8}$ di 240 CHF = …… ; $\frac{2}{3}$ di 240 CHF = ……..

Segue che …….. è minore di ……dunque ……

ii) Confrontare $\frac{7}{3}$ *e* $\frac{9}{4}$; scelgo come grandezza 1820 CHF.

$\frac{7}{3}$ di 1820 CHF = …… ; $\frac{9}{4}$ di 1820 CHF = ……..

Segue che …….. è …….. di ……dunque ……

e) Il prodotto in croce.

i) $\frac{5}{8}$ *e* $\frac{2}{3}$ ➔ 5 . 3 ? 8 . 2 ➔ 15 <16 dunque $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$.

ii) $\frac{17}{13}$ *e* $\frac{19}{14}$ ➔ 17 . 14 ? 13 . 19 ➔ 238 < 247 dunque $\frac{17}{13} < \frac{19}{14}$.

7) Trasformazione di un decimale in frazione.

a) Dal decimale finito alla frazione.

$0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $0{,}28 = \frac{28}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$; $12{,}45 = \frac{1245}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$;

b) Dal decimale periodico alla frazione.

i) Numeri decimali minori di zero.

- Con una cifra periodica.

$0,\overline{1} = \frac{1}{9}$; $0,\overline{2} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{9}$; $0,\overline{5} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{9}$; $0,\overline{7} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{9}$; $0,\overline{9} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{9}$ = ……..

Conclusione: ……

- Con due o più cifre periodiche

$0,\overline{12} = \frac{12}{99}$; $0,\overline{123} = \frac{123}{999}$; $0,\overline{1234} = \frac{1234}{9999}$; $0,\overline{34} =$ $0,\overline{567} =$ $0,\overline{59} =$

- Con una (o più) cifra decimale periodica e una (o più) non periodica

$0{,}1\overline{2} = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}$; $0{,}5\overline{2} = \frac{52-5}{90} = \frac{47}{90}$; $0{,}5\overline{12} = \frac{512-5}{990} = \frac{507}{990}$;

$0{,}7\overline{2} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$; $0{,}54\overline{2} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$; $0{,}7\overline{628} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

ii) Numeri maggiori di zero.

- Con una cifra periodica.

$1,\overline{1} = \frac{11-1}{9} = \frac{10}{9}$; $7,\overline{2} = \frac{\cdots\cdots}{9}$ = ……. ; $48,\overline{5} = \frac{\cdots\cdots}{9}$ = …….. ; $7,\overline{9} = \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{9}$ = ……

- Con due o più cifre periodiche

$1,\overline{12} = \frac{112-1}{99} = \frac{111}{99}$; $6,\overline{123} = \frac{6123-\cdots\cdots}{999} = \frac{\quad}{999}$; $98,\overline{1234} = \frac{981234-\cdots\cdots\cdots\cdots}{9999} = \cdots\ldots$;

$8,\overline{34} =$ $1,\overline{567} =$ $4,\overline{59} =$

- Con una (o più) cifra decimale periodica e una (o più) non periodica

$7,1\overline{2} = \frac{712-71}{90} = \frac{641}{90}$; $4,5\overline{2} = \frac{452-45}{90} = \frac{407}{90}$; $3,5\overline{12} = \frac{3512-35}{990} = \frac{3477}{990}$;

$1,7\overline{2} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$; $6,54\overline{2} = \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$; $2,7\overline{628} = \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

Ricorda dunque che: $1,\overline{9}$= ……; $7,\overline{9}$= ……; $9,\overline{9}$= ……; $34,\overline{9}$= ……;

8) La frazione come numero misto.

È un numero formato da una parte intera e da una frazione.

Es. $5\frac{1}{2}$ = 5 + $\frac{1}{2}$ = 5 + 0,5 = 5,5

Noi vedremo come possiamo trasformare una frazione impropria (perché?) in un numero misto.

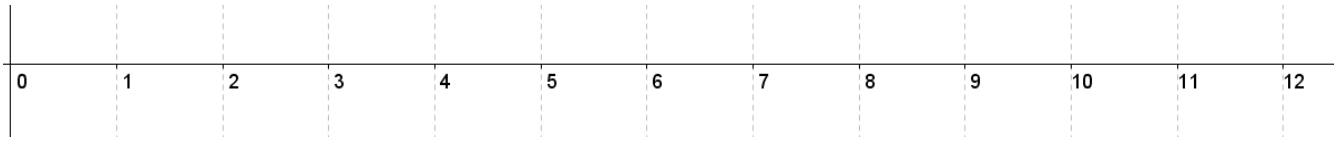
$\frac{25}{4} = \frac{\cdots\cdots}{4} + \frac{\cdots\cdots}{.} = \cdots + \frac{\cdots\cdots}{4} = \cdots\ldots\ \frac{\cdots\cdots}{4}$; $\frac{8}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$;

$\frac{57}{13} = \frac{\cdots\cdots}{13} + \frac{\cdots\cdots}{.13} = \cdots + \frac{\cdots\cdots}{13} = \cdots\ \frac{\cdots\cdots}{13}$; $\frac{77}{8} = \frac{\cdots\cdots}{8} + \frac{\cdots\cdots}{8} = \cdots + \frac{\cdots\cdots}{8} = \cdots\ \frac{\cdots\cdots}{8}$;

9) Rappresentazione sulla retta numerica di una frazione.

Indica sulla retta le seguenti frazioni.

$\frac{1}{2} = \cdots\ldots$; $\frac{7}{2} = \cdots\ldots\ldots$; $\frac{4}{3} = \cdots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{15}{2} = \cdots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{34}{3} = \cdots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\frac{1}{10} = \cdots\ldots\ldots$; $\frac{57}{5} = \cdots\ldots$

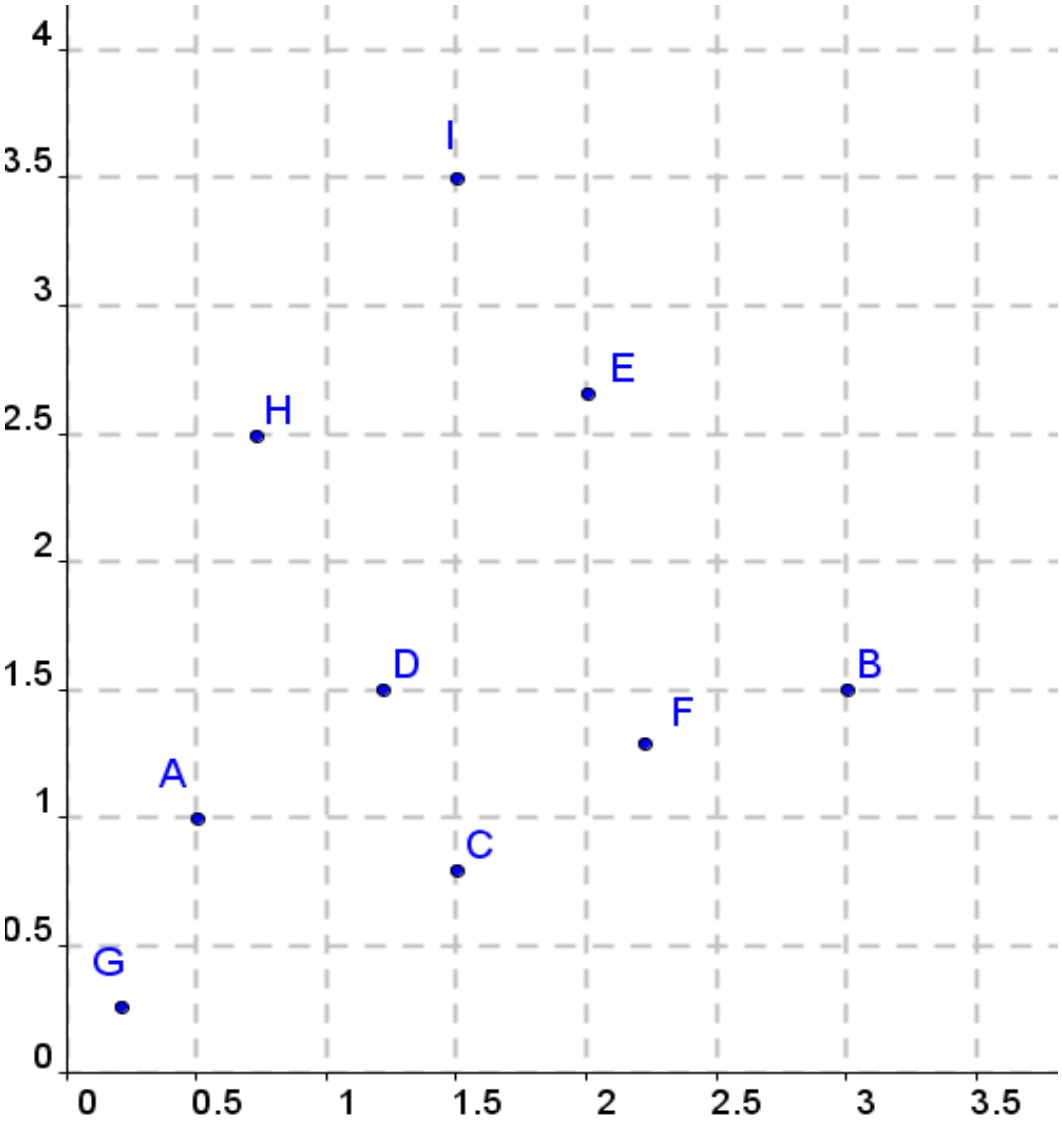


10) L'aerogramma – diagramma a torta.

In una classe di 20 allievi abbiamo 12 ragazzi. Determina

a) La parte dei ragazzi.
b) La parte delle ragazze.
c) In un cerchio, l'angolo occupato dai ragazzi.
d) In un cerchio, l'angolo occupato dalle ragazze.
e) Rappresenta la situazione con un aerogramma.

11) Rappresentazione di un punto, dato con frazioni, sul piano Cartesiano.



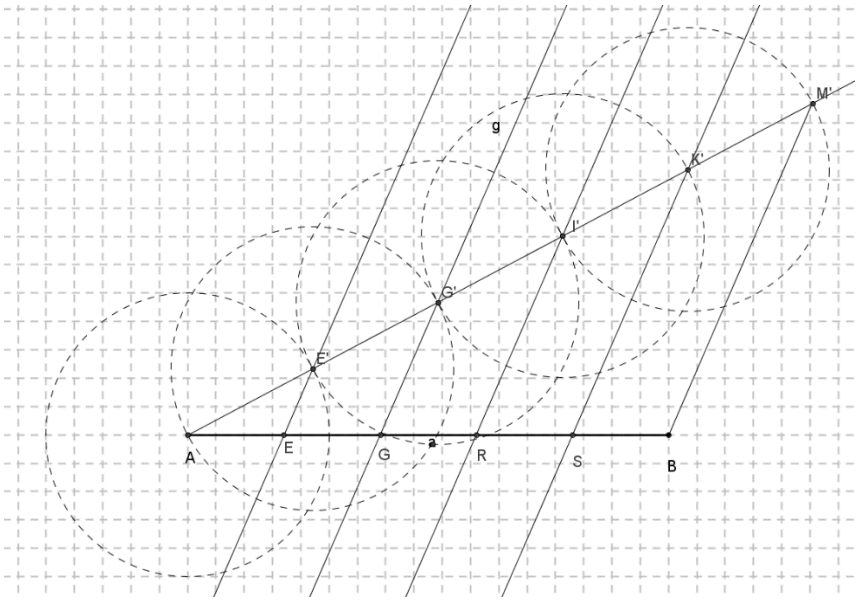
Sapendo che A ($\frac{1}{2}$; 1) determina le coordinate degli altri punti:

B = (.....; .....); C = (.....; .....); D = (.....; .....); E = (.....; .....); F = (.....; .....); G = (.....; .....);

H = (.....; .....); I = (.....; .....); Inserisci : L = ($\frac{2}{3}$; 2) ; M = ($\frac{7}{2}$; $\frac{7}{3}$) ; N = ($\frac{10}{3}$; $\frac{11}{3}$); P=($2,\overline{6}\,;3,\overline{4}$)

12) Dividere un segmento in parti uguali.

Esempio: Dividere $\overline{AB}$ in 5 parti congruenti.



Metodo:

a) Traccio una semiretta con origine in A.

b) Con il compasso, apertura a piacere, riporto 5 volte una lunghezza, ottengo i punti E' ; G'; I' ; K' ; M'.

c) Congiungo i punti M'B.

d) Traccio le parallele ad M'B passanti per E' ; G'; I' ; K'.

e) Ottengo i punti E; G; R; S.

f) Abbiamo diviso il $\overline{AB}$ in 5 parti congruenti $|AE| = |EG| = |GR| = |RS| = |SB| = \cdots \ldots . cm$

Completa: $|\mathrm{AE}| = \cdots \ldots \ldots |\mathrm{AB}|$; $|\mathrm{AB}| = \cdots \ldots \ldots |\mathrm{AE}|$; $|\mathrm{AG}| = \cdots \ldots \ldots |\mathrm{AB}|$; $|\mathrm{AS}| = \cdots \ldots \ldots |\mathrm{SB}|$

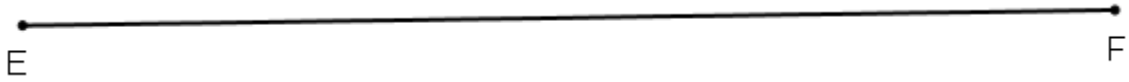
Esercizi.

i) Dividere $\overline{AB}$ in 3 parti congruenti. ii) Dividere $\overline{CD}$ in 4 parti congruenti.





iii) Dividere $\overline{EF}$ in 7 parti congruenti.



13) **Esercizi**.

1) Di una buona torta preferiresti avere i 4/5 o i 5/6? Motiva la risposta!
2) 28 kg che parte rappresentano di 700 kg?
3) Calcola $\frac{1}{3}$ di 2 h 45 min.
4) Ho speso i 3/5 di quanto possedevo; mi sono rimasti 30 CHF. Quanto ammonta la somma iniziale?
5) Un viticoltore produce 1200 hL di vino all'anno. I $\frac{3}{4}$ della sua produzione è costituita da vino rosso; $\frac{1}{6}$ della produzione è vino bianco e il rimanente rosato.
   Calcola quanti litri di ogni tipo di vino produce.
   Che parte rappresenta il vino rosato rispetto alla produzione?
6) In un comune i $\frac{3}{7}$ degli aventi diritto di voto, cioè 315 cittadini, si sono recati alle urne. Quanti sono i cittadini che non si sono recati alle urne? Che frazione rappresentano?
7) Senza contare i sabati e le domeniche io avrei 40 anni. Quanti anni ho io in tutto contando anche i sabati e le domeniche?
8) Una corda è lunga 20 cm. Viene tagliata in 2 pezzi, di cui uno è i 2/3 dell'altro. Quanto misura ciascuno dei 2 pezzi?
9) Trovare 2 numeri sapendo che la loro somma è 6 e che uno è la metà dell'altro.
10) Durante una partita di basket, il numero 10 ha centrato il canestro 13 volte su 24 tentativi, mentre il numero 20 ha fatto centro 10 volte su 18 tentativi.
    Chi è stato il più preciso dei due?
11) Una tanica è piena per i tre quinti della sua capacità e mancano 16 litri per riempirla.
    i) Qual è la capacità della tanica? ii) Quanti litri ci sono nella tanica?
12) Nella costruzione di una strada si è proceduto nel modo seguente:
    - il primo anno se ne è costruito un terzo
    - il secondo anno se ne sono costruiti i due settimi
    - il terzo anno se ne sono costruiti i cinque ventunesimi.

    i) Quale frazione di strada rimane da costruire il quarto anno, se si vuole completarla?

    ii) Sapendo che il tratto costruito nei primi tre anni è lungo 126 km, calcola la lunghezza dell'intera strada
13) Ricetta per il tiramisù: Con queste dosi si prepara un ottimo tiramisù per 4 persone
    200 grammi di mascarpone; 3 cucchiai di zucchero ;2 uova; 2 tazzine di caffè
    18 savoiardi; una spruzzata di cacao amaro.
    Calcola le dosi per preparare un tiramisù per 2 persone, per 8 persone, 5 persone, 6 persone.